TU - Berlin Fachbereich 1

Institut für Kommunikationswissenschaft

Fachgebiet Kommunikationswissenschaftliche Grundlagen von Sprache und Musik

Script

Einführung in die Kommunikationstechnik

Teil 1

(von 2)

Version 0.84

Prof. Dr. M. Krause

überarbeitet und ergänzt (SS 2001-SS2004)

von C. Bradter

(basierend auf Aufl. 3, SS 1993)

Inhalt:

1. Die elektrischen Grundgrößen: Strom, Spannung, Widerstand

1.1. Die elektrische Ladung

Die verschiedenen chemischen Stoffe lassen sich auf mechanischem Wege so lange zerkleinern, bis man zu den Molekülen gelangt. Auf chemischen Wege kann man diese Moleküle noch weiter in ihre elementaren Bausteine - die Atome - zerlegen.

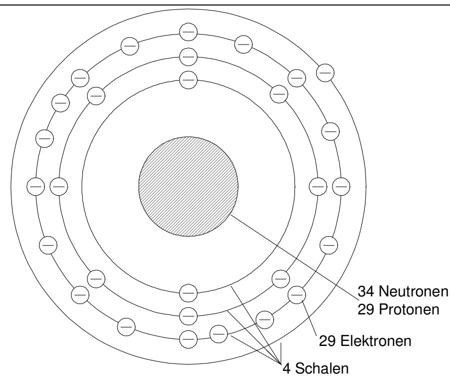


Abb. 1.1.: Schematische Darstellung vom Cu - Atom

Im Modell wird ein Atom als bestehend aus einem Atomkern und den Elektronen, die diesen Kern umkreisen, dargestellt. Der Kern selbst setzt sich zusammen aus den positiv geladenen Protonen und den ungeladenen Neutronen. Die Elektronen sind negativ geladen und entsprechen der Anzahl nach der positiv geladenen Protonen. In diesem Zustand sind die Atome elektrisch neutral.

Die Elektronen umkreisen den Atomkern auf Bahnen. Gruppen von Elektronen mit annähernd gleichem Bahnabstand vom Kern bilden eine Elektronenschale, die damit von einer bestimmten Anzahl von Elektronen besetzt ist. Auf der äußersten Schale können bis zu acht Elektronen (Valenzelektronen) Platz finden.

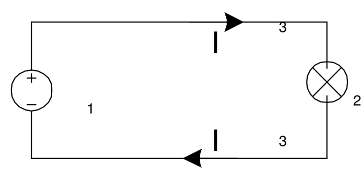
Diese Valenzelektronen stehen in vielen Stoffen für den Transport elektrischer Ladungen als 'quasi-freie' Elektronen zur Verfügung, wenn sie mit relativ geringem Energieaufwand aus dem Verband gelöst werden können. Die Anzahl und die Beweglichkeit der Ladungsträger entscheidet über die Verwendung des Stoffes:

- Leiter besitzen viele bewegliche Ladungsträger. Insbesondere in Metallen werden schon bei Raumtemperatur zahlreiche bewegliche Elektronen aus dem Atomverband gelöst und stehen als freie Ladungsträger zur Verfügung.
- Nichtleiter (Isolatoren) besitzen keine beweglichen Ladungsträger.
- Halbleiter besitzen im reinen Zustand keine freien Ladungsträger. Durch Einbau von Fremdatomen wird bei ihnen eine erhöhte Leitungsfähigkeit erzielt.

Entfernt man aus einem elektrisch neutralen Atom ein Elektron, so hat der Atomrest eine positive elektrische Ladung. Dieses positiv geladene Ion hat die Ladung $Q = +e$ ($e = 1.602 \times 10^{-19}$ C). Im umgekehrten Falle, einem Atom wird ein zusätzliches Elektron angelagert, wird das Atom zum negativ geladenen Ion mit der Ladung $Q = -e$. Da in Gasen und Flüssigkeiten die Atome untereinander nicht fest verbunden sondern beweglich sind, können hier als Ladungsträger sowohl Elektronen als auch Ionen auftreten (Elektronenleitung, Ionenleitung).

1.2. Der elektrische Strom

Die Stoffe haben also unterschiedliche Eigenschaften abhängig von Anzahl und Beweglichkeit der Ladungsträger. Diese Ladungsträger führen ständig unregelmäßige Bewegungen aus. Wird aus dieser Bewegung eine gerichtete Bewegung, spricht man vom elektrischen Strom. Dieser Strom kann allerdings nur in einem geschlossenen Kreislauf fließen, dem elektrischen Stromkreis. Die folgende Abb. 1.2. zeigt einen einfachen Stromkreis mit einer Spannungsquelle (1), einer Glühlampe (2) und den elektrischen Leitungen (3), die beide Teile miteinander verbinden.

Abb. 1.2.: Ein einfacher Stromkreis	

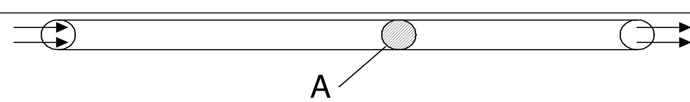
Weitere Definitionen zum elektrischen Strom:

Ladungsmenge

Die Ladungsmenge Q ergibt sich aus der Anzahl n der Ladungsträger, die durch einen bestimmten Querschnitt transportiert werden und deren Elementarladung e. Die Ladungsmenge wird in Coulomb [C] oder Amperesekunden [As] angegeben.	$Q = n \cdot e$ [C]

Stromstärke

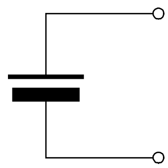
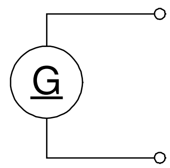
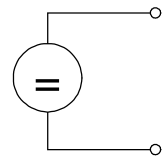
Die Stromstärke gibt an, welche Ladungsmenge in einer bestimmten Zeiteinheit durch einen bestimmten Querschnitt transportiert wird.

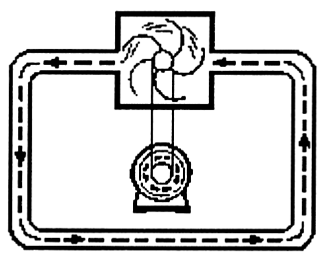
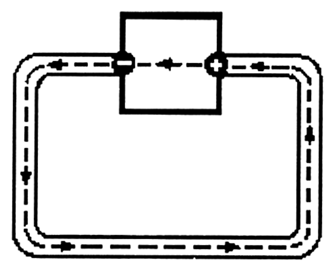
Abb. 1.3.: Ladungstransport	

Die Bestimmungsgröße des elektrischen Stromes ist die Stromstärke. Das Formelzeichen ist ***I*** und die Einheit Ampère **[A]**.	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ [A] (bei Gleichstrom)

1.3. Die elektrische Spannung

Damit überhaupt ein Strom fließen kann, bedarf es einer Ursache, einer Potentialdifferenz zwischen zwei Polen einer Spannungsquelle. An dem einen Pol der Quelle besteht Elektronenmangel (positiv), und an dem anderen Pol besteht Elektronenüberschuß (negativ). Die Potentialdifferenz bezeichnet man als elektrische Spannung.

<table>
<tr>
<td>Abb. 1.4.:
Verschiedene Schaltzeichen von Spannungsquellen.</td>
<td>
elektrochemische Spannungsquelle</td>
<td>
Gleichspannungs-generator</td>
<td>
Gleichspannungsquelle allgemein</td>
</tr>
</table>

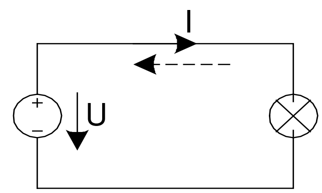
<table>
<tr>
<td rowspan="3">Verbindet man die beiden Pole einer Spannungsquelle mit einem Leiter, so fließt ein Strom durch diesen Leiter. Zur Verdeutlichung dieses Vorganges sei hier der Vergleich mit einem geschlossenen Wasserkreislauf hergestellt. Das Wasser kann nur fließen, wenn ein Druck vorhanden ist, der das Wasser durch die Leitungen preßt.</td>
<td colspan="2">Abb. 1.5.: Wasserkreislauf und Kreislauf mit Elektronenpumpe</td>
</tr>
<tr>
<td>Wasserpumpe</td>
<td>Elektronenpumpe</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Die Wasserpumpe treibt das Wasser in einer bestimmten Richtung durch das Rohrnetz. Je größer die Kraft der Pumpe ist, desto höher ist der Wasserdruck. Fällt die Pumpe aus, ist der Kreislauf unterbrochen.

Überträgt man diese Verhältnisse nun auf den elektrischen Bereich, so besitzt die Spannungsquelle also eine Art Kraft, die einen elektrischen Druck auf die Elektronen im geschlossenen Stromkreis ausübt. Man kann die Spannungsquelle somit auch als Elektronenquelle oder Elektronenpumpe bezeichnen.

Wie in Abb. 1.4. dargestellt, haben Gleichspannungsquellen einen Pluspol und einen Minuspol. Am Pluspol besteht Elektronenmangel und am Minuspol Elektronenüberschuss. Dieser Unterschied zwischen den beiden Polen wird Potentialdifferenz oder Spannung genannt. Das Formelzeichen der Spannung ist U und die Einheit Volt [V].

Je größer die Potentialdifferenz ist, desto größer ist der Druck auf die Elektronen im geschlossenen Stromkreis. Die Elektronen fließen dabei im physikalischen Sinne vom Minuspol zum Pluspol, also vom Elektronenüberschuss zum Elektronenmangel.

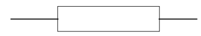
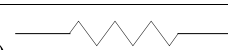
In den Schaltbildern werden Spannungsquellen mit dem Richtungspfeil der Spannung, der von (+) nach (-) zeigt, dargestellt.	 Abb. 1. 6.: Gleichspannungsquelle mit Leiter (physikalische Stromrichtung (⟶) und technische Stromrichtung (- - - - - - -▶))

Die Stromrichtung wird in technischen Darstellungen umgekehrt zur Richtung der Elektronenbewegung, also von *Plus* nach *Minus*, angegeben (technische Stromrichtung). Das ist historisch bedingt.

Zum Transport der Elektronen ist ein bestimmter Energieaufwand nötig, der zur Erwärmung des Leiters führt. Die dabei entstehende Wärmeenergie **W** ist proportional der transportierten Ladung **Q**. Der Quotient aus Wärmeenergie und transportierter Ladungsmenge entspricht ebenso der elektrischen Spannung **U**.	Es gilt: $U = \frac{W}{Q}$ [Nm A^{-1} s^{-1}] 1 Nm A^{-1} s^{-1} = 1 Volt

1.4. Der elektrische Widerstand

Der Leiter in Abb. 1.6. stellt beispielsweise einen elektrischen Widerstand dar, ebenso die Glühlampe. Allgemein wird ein von Spannung und Strom unabhängiger Widerstand als ohmscher Widerstand bezeichnet. Das Formelzeichen ist **R** und die Einheit, in der ein Widerstand angegeben wird, Ohm [**Ω**]. Das Schaltzeichen für den Widerstand ist:

Abb. 1.7.: Schaltzeichen Widerstand	 (deutsch)  (usa)

Weitere Definitionen:

Leitwert

Der Leitwert G ist der Kehrwert des Widerstandes R und wird in Siemens [S] angegeben.

$$G = \frac{1}{R} \qquad [S]$$

Spezifischer Widerstand:

Der spezifische Widerstand $\rho\ [\frac{\Omega mm^2}{m}]$ (griech. rho) ist eine Materialkonstante, die angibt, welchen Widerstand ein Leiter mit dem Querschnitt von 1 mm^2 auf einer Länge von 1 m besitzt.

Der elektrische Widerstand eines Leiters ist proportional zur Länge des Leiters und umgekehrt proportional zum Querschnitt des Leiters. Daraus folgt:

$R = \frac{\rho \cdot l}{A} \qquad \left[\frac{\frac{\Omega mm^2}{m} \cdot m}{mm^2}\right] = [\Omega]$	l = Länge des Leiters A = Querschnittsfläche des Leiters ρ = spezifischer Widerstand

Leitfähigkeit

Den Kehrwert des spezifischen Widerstandes bezeichnet man als Leitfähigkeit κ.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad [\frac{S \cdot m}{mm^2}]$$

Werkstoff	spez. Widerstand ρ $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$	Leitfähigkeit κ $[\frac{S \cdot m}{mm^2}]$	Temperaturkoeffizient α $[\frac{1}{K}]$
Silber	0.0165	60.6	0,0041
Kupfer	0.0178	57.2	0,0039
Gold	0.022	44.0	0,00398
Aluminium	0.0278	36.0	0,0036
Eisen	0.1 ... 0.15	10 ... 7	0,005
Konstantan	0.50	2.0	0,00004
Glas	10^{15} ... 10^{21}	10^{-15} ... 10^{-21}	
Quarz	4×10^{23}	2.5×10^{-24}	
Leitungswasser	2×10^{7}	2×10^{-7}	

Abb. 1.8.: Übersicht über den spezifischen Widerstand, die Leitfähigkeit und den Temperaturkoeffizienten verschiedener Werkstoffe.

Thermische Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes:

Der spezifische Widerstand ist im allgemeinen temperaturabhängig. In einem bestimmten Temperaturbereich in der Nähe der Raumtemperatur (20°C) besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Temperatur und spezifischem Widerstand.

Der Temperaturkoeffizient (auch Temperaturbeiwert) α (griech. alpha) gibt an, um wieviel Ohm der Widerstand von 1 Ω bei 1 K Temperaturerhöhung zunimmt wird.

$\alpha \quad [\frac{1}{K}]$

Es gilt:

$\rho(\vartheta) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_0))$	$\rho(\vartheta)$	-	spezifischer Widerstand bei der Temperatur ϑ (griech. thēta)
	ρ_0	-	spezifischer Widerstand bei der Bezugstemperatur ϑ_0
	ϑ	-	Temperatur
	ϑ_0	-	Bezugstemperatur
	α	-	Temperaturkoeffizient (thermische Materialkonstante)

Der oben genannte lineare Zusammenhang zwischen Temperatur und spezifischem Widerstand gilt nur bis zu der Temperaturgrenze im Hochtemperaturbereich, an der eine Veränderung des Kristallgefüges des Widerstandsmaterials auftritt. Ab diesem Punkt (Curie-Temperatur) steigt der spezifische Widerstand sprunghaft an. Im Tiefsttemperaturbereich. in der Nähe des absoluten Nullpunkts (-273°C) treten ebenfalls sprunghafte Veränderungen des spezifischen Widerstandes auf (Supra-Leitung).

1.5. Widerstandsfarbcodes

Widerstände mit geringer Belastbarkeit (bis ca. 2W) werden häufig mit Hilfe eines Farbcodes gekennzeichnet. Dabei gibt der Farbcode den Widerstandswert und die Bauteiltoleranz an.

Farbe	*Wert*	*Multiplikator*	*Toleranz*	*Farbe*	*Wert*	*Multiplikator*	*Toleranz*
schwarz	0	10^0		violett	7	10^7	+/- 0.1%
braun	1	10^1	+/- 1%	grau	8	10^8	
rot	2	10^2	+/- 2%	weiß	9	10^9	
orange	3	10^3		gold		10^{-1}	+/- 5%
gelb	4	10^4		silber		10^{-2}	+/- 10%
grün	5	10^5	+/- 0.5%	keine			+/- 20%
blau	6	10^6	+/- 0.25%				

Die ersten zwei oder drei Ringe geben die ersten Stellen des Widerstandswertes an. Darauf folgt ein Multiplikator. Bei 4 bzw. 5 Ringen gibt der letzte Ring die Toleranz an. Sind 6 Ringe vorhanden, wurde ein weiterer Ring für den Temperaturkoeffizienten hinzugefügt (in ppm/Grad). Braun steht für 100ppm, rot für 50 ppm, orange für 15 ppm und gelb für 25ppm.

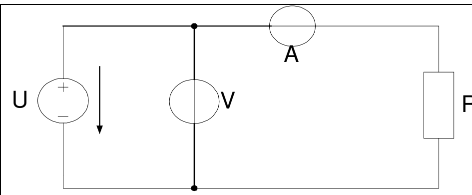
2. Das Ohmsche Gesetz, die elektrische Leistung

2.1. Das Ohmsche Gesetz

Strom, Spannung und Widerstand sind in bestimmter Weise voneinander abhängig.

Abb. 2.1.:

Einfacher Stromkreis mit Meßgeräten



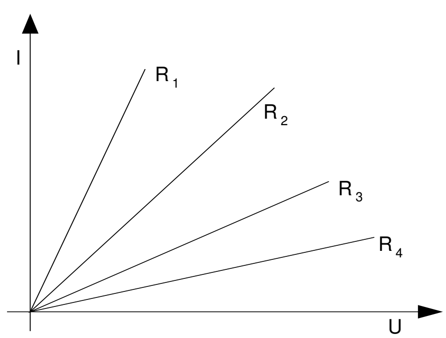
Wird in einem Stromkreis die Spannung mit einem Voltmeter (V) und der Strom mit einem Ampèremeter (A) gemessen, so ergibt sich, daß Strom und Spannung zueinander proportional sind. Die Proportionalitätskonstante ist der Widerstand *R*:

$U = R \cdot I$ [V]	$I = \frac{U}{R}$ [A]	$R = \frac{U}{I}$ [Ω]

Für den Ohmschen Widerstand ergeben sich somit folgende Strom-Spannungs-Diagramme:

Abb. 2.2.:

Widerstandskennlinien



$R_4 > R_3 > R_2 > R_1$

2.2. Die elektrische Leistung

Wie im Abschnitt über die Spannung bereits dargestellt, wird einem an einer Spannungsquelle angeschlossenen Widerstand (z.B. elektrischer Leiter) folgende Energie zugeführt:

$W = U \cdot Q$ $= U \cdot I \cdot t$	W = Wärmeenergie Q = transportierte Ladung	I = Stromstärke t = Dauer des Stromflusses

Die in einer Zeiteinheit gelieferte Energie bezeichnet man als **Leistung P.** Die Einheit der Leistung ist Watt **[W]**. Daraus folgt:

$P = \frac{W}{t} = U \cdot I$ **[W]**	1W = 1 VA = 1 Js^{-1} = 1 Nms^{-1} = 1 kg m^2 s^{-3}
$P = U \cdot I$ $= \frac{U^2}{R}$ $= I^2 \cdot R$ **[W]**	Durch Anwendung des ohmschen Gesetzes U = R · I auf die Formel ergibt sich für die Leistung nebenstehender Zusammenhang

3. Elektrische Netzwerke, die Kirchhoffschen Gesetze

3.1. Netzwerke

Netzwerke sind Zusammenschaltungen von unterschiedlichen elektrischen Bauteilen. Das folgende Bild zeigt zwei Beispiele für ein aktives und ein passives elektrisches Netzwerk:

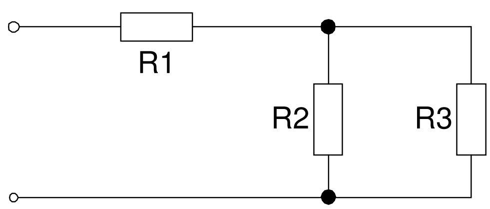


Abb. 3.1.: Passives elektrisches Netzwerk

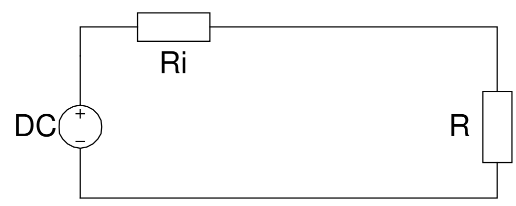


Abb. 3.2.: Aktives elektrisches Netzwerk

Ein aktives Netzwerk beinhaltet im Unterschied zum passiven Netzwerk Spannungsquellen. Zur Berechnung solcher Netzwerke unternimmt man eine Netzwerkanalyse. Im folgenden werden die Grundbegriffe der Netzwerkanalyse vorgestellt.

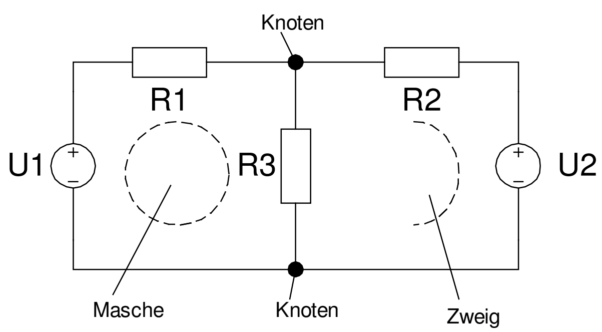


Abb. 3.3.: Knoten, Zweig und Masche in einem aktiven Netzwerk mit zwei Spannungsquellen.

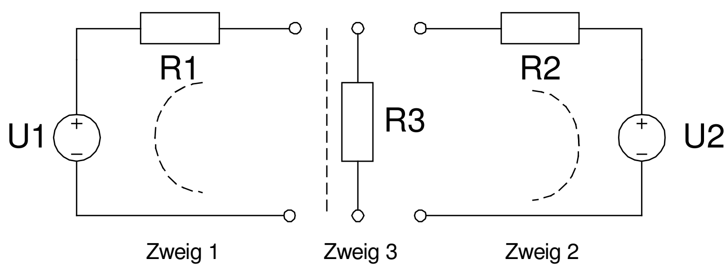


Abb. 3.4.: Dasselbe Netzwerk, die Zweige sind einzeln dargestellt.

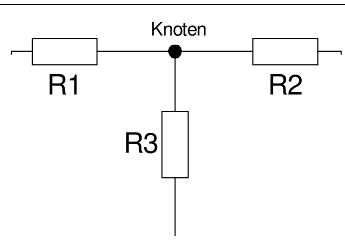


Abb. 3.5.: Ein Knoten aus Abb. 3.3.

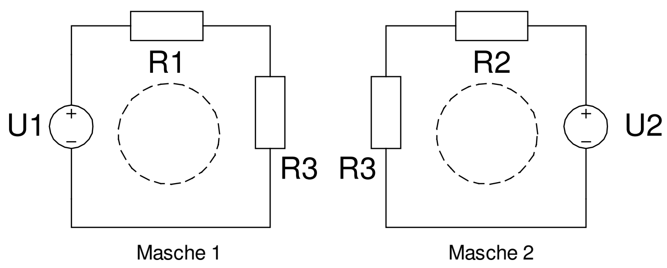


Abb. 3.6.:
Die beiden Maschen aus dem Netzwerk aus Abb. 3.3. Beide Maschen enthalten den Widerstand R3.

Definitionen:

<u>Knoten :</u>

Knoten sind Verbindungspunkt mehrerer Zweige (auch Verzweigung oder Verteiler).

<u>Zweig:</u>

Ein Zweig ist ein Leitungspfad, der von demselben Strom durchflossen wird.

<u>Masche:</u>

Eine Masche ist eine <u>geschlossene</u> Kette von Zweigen.

Gleiche Elemente können dabei in verschiedenen Maschen vorkommen (vergl. Abb. 3.6.)

<u>Zählpfeile:</u>

Zählpfeile geben die angenommenen Richtungen der Ströme und Spannungen an. Wenn möglich, gibt man die Zählpfeile in der tatsächlich vorliegenden Richtung an. Ist dies nicht möglich kann man Zahlpfeile willkürlich wählen. Allerdings muß man dann die Zählweise konsequent in allen Teilen (Maschen) des Netzwerks beibehalten.

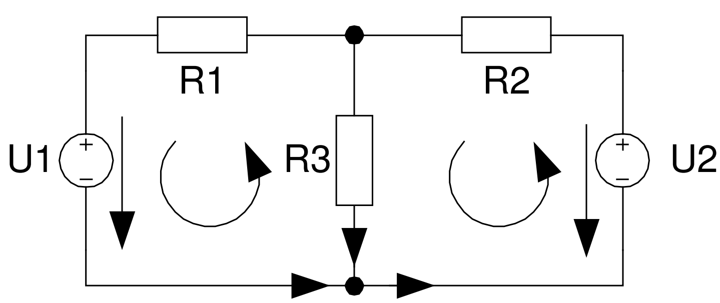


Abb. 3.7.:
Das Netzwerk aus Abb. 10. Eingezeichnet sind Zählpfeile für die Ströme eines jeden Zweiges, für die Spannungen U1 und U2 und Umlaufpfeile für jede der beiden Maschen.

3.2. Die Kirchhoffschen Gesetze

Das erste Kirchhoffsche Gesetz bezieht sich auf die Knotenpunkte von Netzwerken. Die Knotenregel folgt der Überlegung, daß in einem Knoten keine Ladung verloren gehen kann. Daraus folgt, daß die in einen Knoten hineinfließenden Ströme gleich den von dem Knoten wegfließenden Strömen sind.

1. Kirchhoffsche Gesetz (Knotenregel):
An jedem Knoten ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

Die Stromflußrichtung muß vorgegeben werden. Alle Ströme, die in den Knoten hineinfließen, erhalten ein positives Vorzeichen. Die Ströme, die von dem Knoten wegfließen, erhalten ein negatives Vorzeichen. Werden alle Vorzeichen konsequent vertauscht, hat dies keine Auswirkungen auf die Netzwerkanalyse.

Es gilt: $$\sum_{i=1}^{i=n} I_i = 0$$

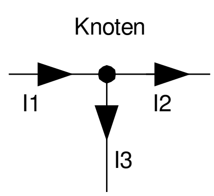


Abb. 3.8.:
Ein Knoten mit I_1, I_2 und U_3. Nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetzt gilt:
$I_1 - I_2 - I_3 = 0$

Das zweite Kirchhoffsche Gesetz bezieht sich auf die Maschen von Netzwerken. Es besagt, daß in einer Masche die Summe der Erzeugerspannungen gleich der Summe der Spannungen am Verbraucher (Spannungsabfälle) ist. Das bedeutet, daß die Summe aller Spannungen gleich Null ist.

2. Kirchhoffsche Gesetz (Maschenregel):
In einer Masche ist die Summe aller auftretenden Spannungen gleich Null:

Es gilt: $$\sum_{i=1}^{i=n} U_i = 0$$

Die Festlegung des Vorzeichens einzelner Spannungen innerhalb einer Masche geschieht durch das Festlegen einer Umlaufrichtung. Die Wahl der Umlaufrichtung ist willkürlich, sie darf allerdings bei der Berechnung eines Netzwerkes nicht mehr verändert werden.

Nach der Festlegung der Umlaufrichtung erhalten alle Spannungen ein positives Vorzeichen, wenn Umlaufrichtung und Spannungspfeil in die gleiche Richtung zeigen. Im anderen Fall erhält die Spannung ein negatives Vorzeichen.

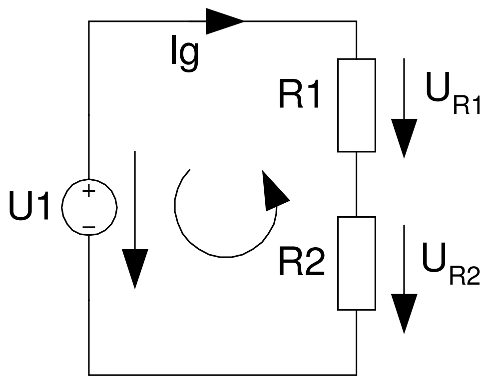


Abb. 3.9.:

Eine Masche mit Richtungspfeilen für Strom und Spannungen und einer vorgegebenen Umlaufrichtung.

Folgt man dem Pfeil für die Umlaufrichtung, so erhält U_1 ein positives Vorzeichen, U_{R1} und U_{R2} jedoch negative.

Es gilt:

$\mathbf{U_1 = U_{R1} + U_{R2}}$ bzw.

$\mathbf{U_1 - U_{R1} - U_{R2} = 0}$

4. Berechnung von Gleichstromkreisen

4.1. Reihenschaltung von Widerständen

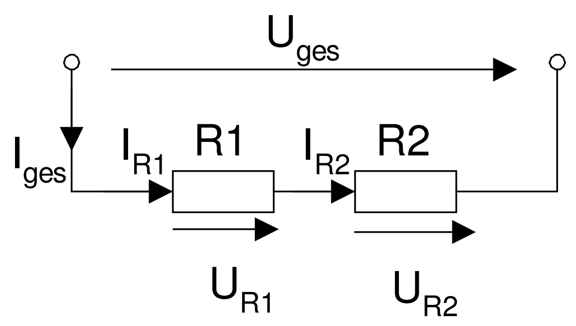


Abb. 4.1.:

Reihenschaltung von zwei Widerständen.

U_{ges} = über den beiden Widerständen anliegende Spannung

U_{R1} bzw. U_{R2} = über den Einzelwiderständen anliegende Spannungen

I_{ges} = Gesamtstrom durch den Zweig

I_{R1} bzw. I_{R2} = Ströme durch die Einzelwiderstände

In einer Reihenschaltung fließt durch den gesamten Zweig der gleiche Strom. Die Gesamtspannung ist gleich der Summe der Einzelspannungen an den Widerständen. Die Einzelwiderstände addieren sich zum Gesamtwiderstand. Es gilt:

$\mathbf{I_{ges} = I_{R1} = I_{R2}}$ und $\mathbf{U_{ges} = U_{R1} + U_{R2}}$

$R_1 = \frac{U_{R1}}{I_{R1}} = \frac{U_{R1}}{I_{ges}} \rightarrow U_{R1} = R_1 \cdot I_g$	$R_{ges} = \frac{U_{ges}}{I_{ges}} = \frac{U_{R1} + U_{R1}}{I_{ges}}$
$R_1 = \frac{U_{R2}}{I_{R2}} = \frac{U_{R2}}{I_{ges}} \rightarrow U_{R2} = R_2 \cdot I_g$	$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot I_{ges} + R_2 \cdot I_{ges}}{I_{ges}} = R_1 + R_2$

$\mathbf{R_{ges} = R_1 + R_2}$

4.2. Parallelschaltung von Widerständen

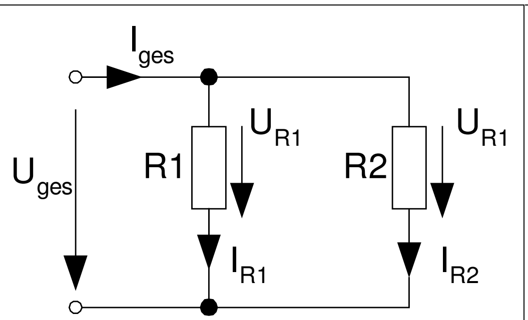


Abb. 4.2.:

Parallelschaltung von zwei Widerständen.

U_{ges} = über den beiden Widerständen anliegende Spannung

U_{R1} bzw. U_{R2} = über den Einzelwiderständen anliegende Spannungen

I_{ges} = Gesamtstrom durch den Zweig

I_{R1} , I_{R2} = Ströme durch die Einzelwiderstände

In der Parallelschaltung liegt an den Widerständen dieselbe Spannung an. Der Strom teilt sich auf, über jeden Widerstand fließt ein Teilstrom. Der Gesamtleitwert ist gleich der Addition der einzelnen Leitwerte. Der Gesamtwiderstand ergibt sich aus dem Kehrwert des Gesamtleitwertes. Für zwei Widerstände gibt es eine vereinfachte Formel zur Berechnung des Gesamtwiderstandes.

$\boldsymbol{U_{ges} = U_{R1} = U_{R2}}$ und $\boldsymbol{I_{ges} = I_{R1} + I_{R2}}$

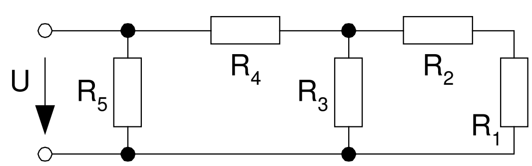
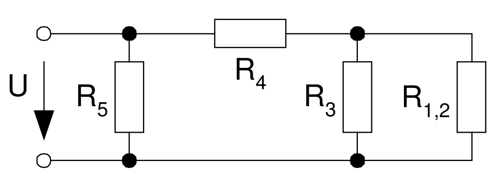
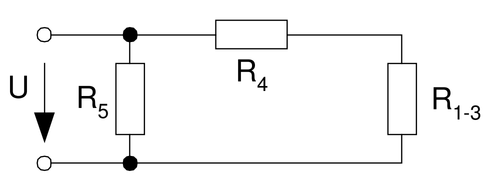
$R_1 = \frac{U_{R1}}{I_{R1}} = \frac{U_{ges}}{I_{R1}} \rightarrow I_{R1} = \frac{U_{ges}}{R_1}$ $R_1 = \frac{U_{R2}}{I_{R2}} = \frac{U_{ges}}{I_{R2}} \rightarrow I_{R2} = \frac{U_{ges}}{R_2}$	$I_{ges} = \frac{U_{ges}}{R_1} + \frac{U_{ges}}{R_2}$ $= \frac{U_{ges} \cdot R_2 + U_{ges} \cdot R_1}{R_1 \cdot R_2} = \frac{U_{ges}}{R_{ges}} \rightarrow$ $R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

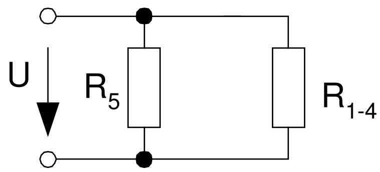
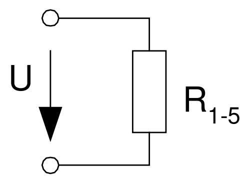
Für die Parallelschaltung von Widerständen gilt:

$G_{ges} = G_1 + G_2$ bzw. $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

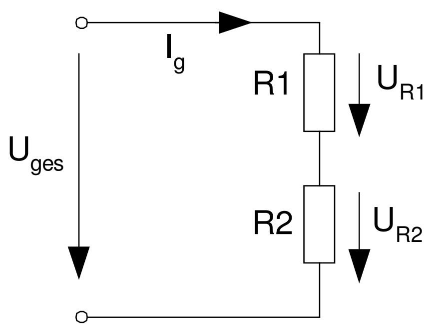
4.3. Zusammenfassungen zu Ersatzwiderständen

Im folgenden soll an Hand eines Beispiels gezeigt werden, wie man komplexe passive Netzwerke berechnen kann.

	Abb. 4.3.: Das Ausgangsnetzwerk:
	Abb. 4.4.: Erste Vereinfachung: R_1 und R_2 liegen in Reihe. Es gilt: $R_{1,2} = R_1 + R_2$
	Abb. 4.5.: Zweite Vereinfachung: $R_{1,2}$ und R_3 sind parallel geschaltet. Es gilt:

<table>
<tr><td></td><td>$R_{1\text{-}3} = R_{1,2} \parallel R_3 = \dfrac{R_{1,2} \cdot R_3}{R_{1,2} + R_3}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Abb. 4.6.:
Dritte Vereinfachung:
$R_{1\text{-}3}$ und R_4 liegen in Reihe. Es gilt:
$R_{1\text{-}4} = R_{1\text{-}3} + R_4$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Abb. 4.7.:
Letzte Vereinfachung:
$R_{1\text{-}4}$ und R_5 sind parallel geschaltet.
Es gilt:
$R_{1\text{-}5} = R_{1\text{-}4} \parallel R_5 = \dfrac{R_{1-4} \cdot R_5}{R_{1-4} + R_5}$</td></tr>
</table>

4.4. Die Spannungsteilerschaltung

<table>
<tr><td>
</td><td>Abb. 4.8.:
Eine einfache Spannungsteilerschaltung.
Sie besteht aus der Reihenschaltung zweier Widerstände.
Die Spannung über R_2 errechnet sich aus:
$U_{R2} = U \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$</td></tr>
</table>

Wie bereits im Kapitel 4.1. dargestellt, fällt an jedem Widerstand eine Teilspannung ab. Das Verhältnis der einzelnen Teilspannungen entspricht dabei genau dem Verhältnis der Widerstände. Aufbauend auf die oben entwickelten Formeln für die Reihenschaltung erhält man also:

$$I_{ges} = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{U_{ges}}{R_1 + R_2} \quad => \quad \frac{U_{R1}}{U_{R2}} = \frac{R_1}{R_2} \quad => \quad \frac{U_{R1}}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

4.5. Der Stromteiler

Entsprechende Gesetze gelten für die Parallelschaltung von Widerständen. Bei parallelgeschalteten Widerständen verhalten sich die Ströme zueinander wie die Leitwerte der Widerstände durch die diese Ströme fließen. In Formeln:

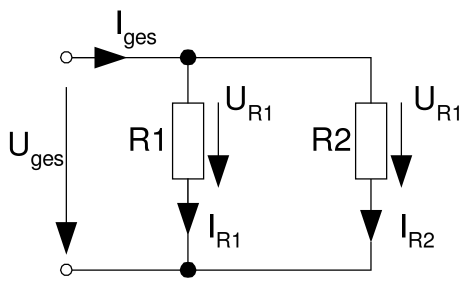


Abb. 4.9.:

Eine einfache Stromteilerschaltung.

Sie besteht aus der Parallelschaltung zweier Widerstände.

Die Strom durch R_1 errechnet sich aus:

$$I_{R1} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_{ges} = \frac{I_{R1}}{G_1} = \frac{I_{R2}}{G_2} = \frac{I_{ges}}{G_1 + G_2} \quad => \quad \frac{I_{R1}}{I_{R2}} = \frac{G_1}{G_2} \quad => \quad \frac{I_{R1}}{I_{ges}} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

4.5. Berechnung einer Schaltung mit mehreren Spannungsquellen

Die Kirchhoffschen Gesetze können direkt zur Anwendung kommen, wenn man Gleichstromkreise mit mehreren Spannungsquellen berechnen möchte. Die Rechenschritte sollen im folgenden kurz skizziert werden. Es sollen für Abb. 4.9. die auftretenden Ströme berechnet werden.

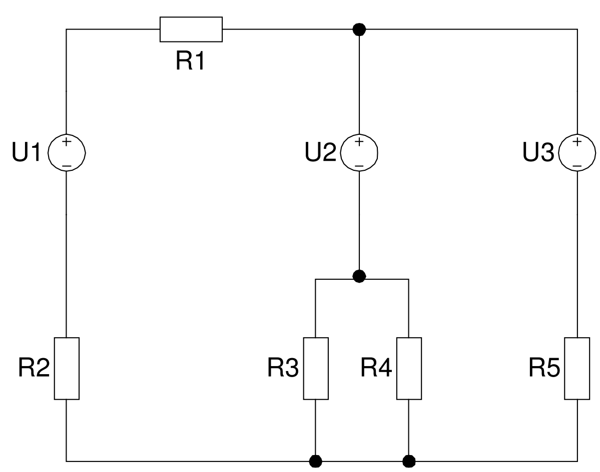
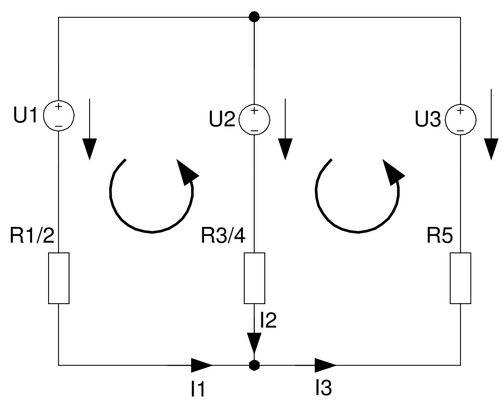


Abb. 4.10.:

Ein Gleichstromkreis mit mehreren Spannungsquellen.

U1 = 12V	R1 = 5R
U2 = 10V	R2 = 5R
U3 = 15V	R3 = 16R
	R4 = 8R
	R5 = 10R

Zuerst werden die Widerstände zusammengefaßt und eine vereinfachtes gleichwertiges Ersatzschaltbild gezeichnet. In dieses werden Richtungspfeile für Strom, Spannungen und Umlaufrichtung innerhalb der Maschen eingezeichnet.

	Abb. 4.11.: Vereinfachtes Ersatzschaltbild mit Richtungspfeilen. $R_{1/2} = R_1 + R_2 = 5R + 5R = 10R$ $R_{3/4} = R_3 \parallel R_4 = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{16\Omega \cdot 8\Omega}{16\Omega + 8\Omega} = 5{,}33R$

Da die realen Stromrichtungen nicht bekannt sind, werden die Richtungspfeile für den Strom erst einmal willkürlich gewählt. Stimmen die gewählten Richtungen nicht mit den tatsächlichen Stromrichtungen überein, macht sich das im Ergebnis lediglich durch ein negatives Vorzeichen bemerkbar. Auch die Umlaufpfeile können beliebig gewählt werden. Allerdings muß man die einmal gewählte Richtung konsequent einhalten.

Die Schaltung enthält drei unbekannte Ströme. Deshalb werden nach Kirchhoff drei Gleichungen mit drei unbekannten aufgestellt. Dazu folgt man den Umlaufpfeilen und addiert die Ströme an einem Knoten zu Null (1. Kirchhoffsche Gesetz) bzw. die Spannungen innerhalb einer Masche zu Null (2. Kirchhoffsche Gesetz).

Nach Kirchhoff 1:	Nach Kirchhoff 2, linke Masche:	Nach Kirchhoff 2, rechte Masche:
$I_1 + I_2 - I_3 = 0$ *bzw.* $I_3 = I_1 + I_2$ (1)	$U_1 + U_{R1/2} - U_{R3/4} - U_2 = 0$ $U_1 + I_1 \cdot R_{1/2} - I_2 \cdot R_{3/4} - U_2 = 0$ (2)	$U_2 + U_{R3/4} + U_{R5} - U_3 = 0$ $U_2 + I_2 \cdot R_{3/4} + I_3 \cdot R_5 - U_3 = 0$ (3)

Damit hat man drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Die Lösung ist nur noch ein mathematisches Problem. Z.B. kann wie folgt gerechnet werden:

Vereinfachung der Gleichungen (2) und (3) durch Einsetzen der Spannungswerte (Das frühe Einsetzen von Werten trägt zur Vermeidung von Fehlern bei). $2V + I_1 \cdot R_{1/2} - I_2 \cdot R_{3/4} = 0$ (2a) $-5V + I_2 \cdot R_{3/4} + I_3 \cdot R_5 = 0$ (3a)	Auflösen von (2a) nach I_1: $I_1 = \frac{I_2 \cdot R_{3/4} - 2V}{R_{1/2}}$ (2b)
Gleichsetzen von $I_1 = I_3 - I_2$ (nach(1)) mit (2b)	Einsetzen von (4) in (3a):

$I_3 - I_2 = \dfrac{I_2 \cdot R_{3/4} - 2V}{R_{1/2}}$ $I_3 = \dfrac{I_2 \cdot R_{3/4} - 2V}{R_{1/2}} + I_2 \qquad \left(I_2 = \dfrac{I_2 \cdot R_{1/2}}{R_{1/2}}\right)$ $I_3 = \dfrac{I_2 \cdot (R_{3/4} + R_{1/2}) - 2V}{R_{1/2}} \qquad (4)$	$-5V + I_2 \cdot R_{3/4} + I_3 \cdot R_5 = 0$ $-5V + I_2 \cdot R_{3/4} + \dfrac{I_2 \cdot (R_{3/4} + R_{1/2}) - 2V}{R_{1/2}} \cdot R_5 = 0$ $I_2 \cdot R_{3/4} + I_2 (R_{1/2} + R_{3/4}) - 2V = 5V$ $I_2 \cdot 5{,}33R + I_2 \cdot 15{,}33R = 7V$ $I_2 = \dfrac{7V}{20.66R} = \underline{\mathbf{338{,}7\ mA}}$
Berechnung von I_1 nach (2a) $2V + I_1 \cdot R_{1/2} - I_2 \cdot R_{3/4} = 0 \qquad (2a)$ $I_1 = \dfrac{-2V + 338{,}7mA \cdot 5.33R}{10R} = \underline{\mathbf{-19.4\ mA}}$	Berechnung von I_3 nah (1): $I_3 = I_1 + I_2 \qquad (1)$ $= 338{,}7\ mA + -0{,}0194\ mA = \underline{\mathbf{319{,}3\ mA}}$

I_1 hat ein negatives Vorzeichen. Der gewählte Richtungspfeil muß daher in die entgegengesetzte Richtung weisen, damit die reale Stromrichtung dargestellt wird.

Die Ströme durch R_3 bzw. R_4 können durch die Anwendung der Stromteilerregel bestimmt werden.

5. Spannungs- und Stromquellen

5.1. Technische (nichtideale) Spannungsquellen

Man unterscheidet in der Elektrotechnik zwischen idealen und nichtidealen Spannungsquellen. Bei der idealen Spannungsquelle bleibt die Spannung zwischen den Anschlußklemmen immer konstant, unabhängig vom entnommenen Strom. Technisch läßt sich dieses Verhalten von Spannungsquellen jedoch nur angenähert erreichen.

Schließt man z.B. an eine Batterie mit einer bestimmten Spannung eine Belastung (Widerstand, Lampe usw.) an, so bleibt die Spannung nicht konstant, sondern sie sinkt. Reale Spannungsquellen zeigen häufig einen mit zunehmender Stromstärke linearen Spannungsabfall an ihren Klemmen.

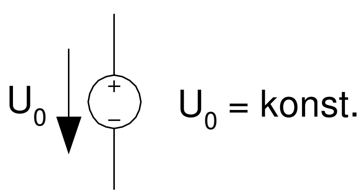
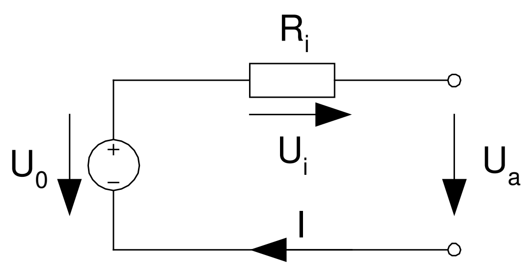
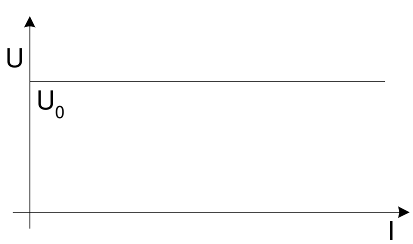
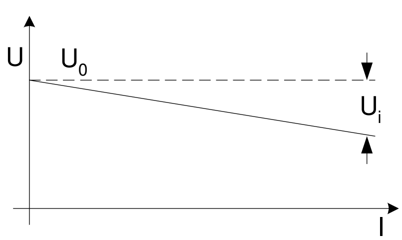
<table>
<tr><td>Ideale Spannungsquelle</td><td>Nichtideale Spannungsquelle</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Kennlinie:

</td><td>Kennlinie:

</td></tr>
</table>

Abb. 5.1.: Ideale und nichtideale Spannungsquellen.

Das Schaltbild der nichtidealen Spannungsquelle stellt diesen Sachverhalt durch die Reihenschaltung einer idealen Spannungsquelle mit einem Widerstand, dem Innenwiderstand der Spannungsquelle, dar. Die Klemmenspannung U_a kann nun durch Anwendung der Maschenregel wie folgt berechnet werden:

$$U_a = U_0 - I \cdot R \qquad \text{und} \qquad U_i = I \cdot R_i$$

Mit zunehmenden Strom wächst linear der Spannungsabfall am Innenwiderstand der Spannungsquelle, und dementsprechend nimmt die Klemmenspannung ab.

Um den Innenwiderstand einer realen Spannungsquelle zu bestimmen, kann man die Leerlaufspannung und den Kurzschlußstrom dieser Spannungsquelle, z.B. durch Messen, ermitteln. Leerlauf und Kurzschluß sind die beiden extremen Betriebszustände einer Spannungsquelle.
Im Leerlauf sind die Anschlußklemmen offen, d.h. es ist kein Verbraucher angeschlossen, eine Belastung der Spannungsquelle findet nicht statt. Damit fließt kein Strom, und der Spannungsabfall am Innenwiderstand R_i ist Null.

Leerlauf: $I = 0$ $U_i = 0$ $U_a = U_L = U_0$ (*Leerlaufspannung*)

Beim Kurzschluß sind die Anschlußklemmen der Spannungsquelle elektrisch leitend verbunden (mit der Annahme, daß der Widerstand dieser Verbindung Null ist). Damit liegt die gesamte Spannung U_0 am Innenwiderstand R_i an, und die Klemmenspannung U_a ist Null. Für den Kurzschlußstrom I_K gilt:

Kurzschluß: $U_a = 0$ $I_K \cdot R_i - U_0 = 0$ $I_K = \frac{U_0}{R_i}$ (*Kurzschlußstrom*)

Damit läßt sich dann der Innenwiderstand der Spannungsquelle ermitteln:

$$R_i = \frac{U_L}{I_K} \qquad \left(\mathit{Innenwiderstand} = \frac{\mathit{Leerlaufspannung}}{\mathit{Kurzschlußstrom}}\right)$$

Bei der Bestimmung des Innenwiderstandes von Spannungsquellen ist es sinnvoll, den Kurzschlußstrom zu begrenzen. Man mißt dann die Klemmenspannung bei einem vorgegebenen Belastungsstrom über einen bekannten Widerstand an den Klemmen der Spannungsquelle.

5.2. Stromquellen mit Innenleitwert

Ideale Stromquellen liefern einen konstanten Strom, unabhängig von der sich an den Anschlußklemmen der Stromquelle ergebenden Spannung. Wie bereits im vorhergehenden Abschnitt bei den realen Spannungsquellen dargestellt, unterscheiden sich auch reale (nichtideale) Stromquellen in ihrem Verhalten von den idealen Stromquellen. Reale Stromquellen weisen immer eine gewisse Abhängigkeit des Stromes von der sich an den Klemmen ergebenden Spannung auf.

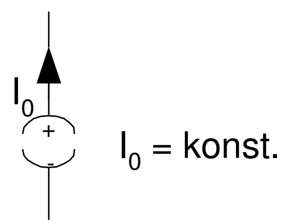
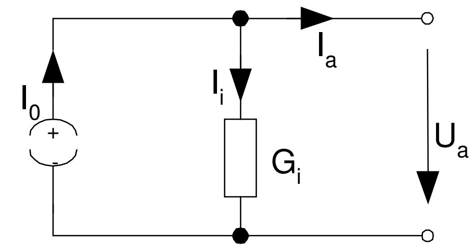
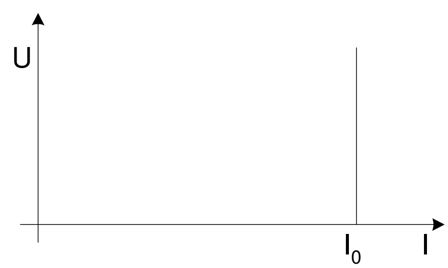
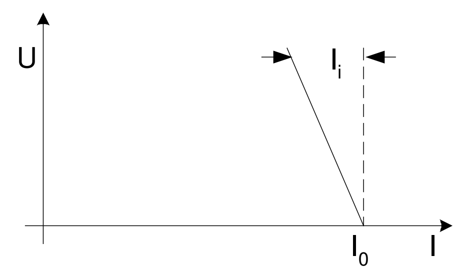
Ideale Stromquelle:	Nichideale Stromquelle:
	
Kennlinie: 	Kennlinie: 

Abb. 5.2.: Ideale und nichtideale Stromquelle

Wie aus dem Schaltbild der nichtidealen Stromquelle hervorgeht, wird dieser Sachverhalt durch einen parallel zur Stromquelle geschalteten lnnenleitwert dargestellt. Durch Anwendung der Knotenregel ergibt sich:

$I_0 - I_i - I_a = 0$ $\qquad I_i = U_a \cdot G_i$ $\qquad I_a = I_0 - U_a \cdot G_i$

Durch Messen kann man auch hier den Innenleitwert der Stromquelle ermitteln. Im Leerlauf ist der Strom I Null und der gesamte Strom I_0 fließt über G_i. Daraus folgt:

Leerlauf: $\qquad I = 0 \qquad U_a = \dfrac{I_0}{G_i}$ $\qquad$ (*Leerlaufspannung*)

Im Kurzschlußfall ist die an den Klemmen anliegende Spannung U Null und über den Innenleitwert G_i, fließt kein Strom. Somit ist der Kurzschlußstrom I_K:

Kurzschluß: $\qquad I_K = I_o$ $\qquad$ (*Kurzschlußstrom*)

Daraus kann nun wieder der Innenleitwert der nichtidealen Stromquelle berechnet werden:

$G_i = \dfrac{I_K}{U_0}$ $\qquad$ ($\mathit{Innenleitwert} = \dfrac{\mathit{Kurzschlußstrom}}{\mathit{Leerlaufspannung}}$)

5.3. Umrechnung einer nichtidealen Spannungsquelle in eine nichtideale Stromquelle

Eine Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand R_i und eine Stromquelle mit einem Innenleitwert G_i sind einander äquivalent, wenn gilt: $R_i = \frac{1}{G_i}$

Für die Umrechnung müssen die Leerlaufspannung U_L ($U_L = U_0$) und der Innenwiderstand R_i bekannt sein. Daraus läßt sich die Ersatzstromquelle berechnen und das entsprechende Schaltbild zeichnen:

$G_i = \frac{1}{R_i}$ und $I_0 = I_K = \frac{U_0}{R_i}$

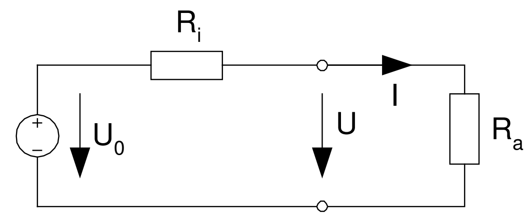
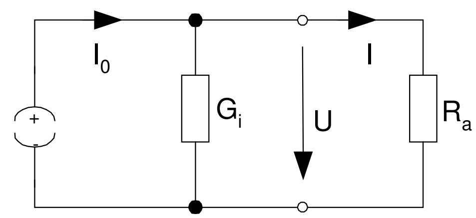
Spannungsquelle:	Stromquelle:
	

Abb. 5.3.: Ersatzspannungsquelle und Ersatzstromquelle, jeweils mit ohmschen Verbraucher

5.4. Berechnung eines einfachen aktiven Netzwerks

Bei der Betrachtung von aktiven Netzwerken ist es oft nützlich, ein solches Netzwerk als nichtideale Spannungsquelle darzustellen.

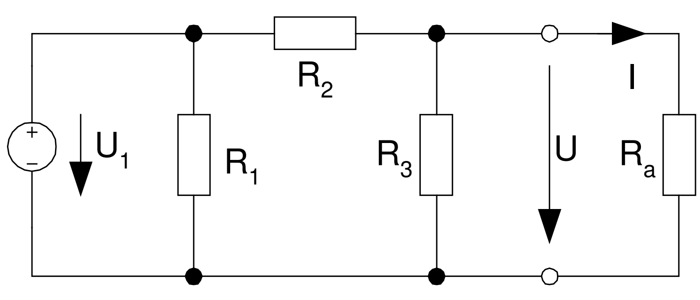


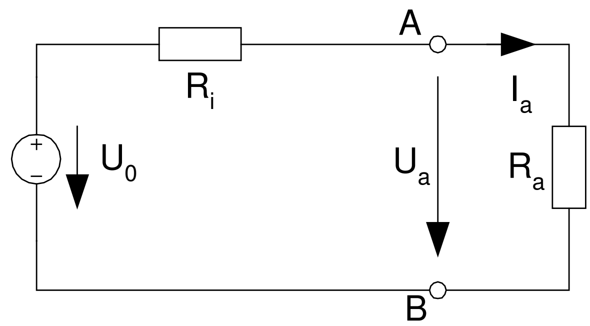
Abb. 5.3.:
Dieses aktive Netzwerk soll in eine nichtideale Spannungsquelle umgerechnet werden.

$R_1 = 1\ k\Omega$ $R_a = 9\ k\Omega$

$R_2 = 90\ k\Omega$ $U_1 = 20\ V$

$R_3 = 10\ k\Omega$

Dabei ist dann nur noch der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle, die zwischen den Punkten A und B anliegende Ausgangsspannung U_a bei Belastung der Ersatzspannungsquelle mit dem Widerstand R_a, sowie der Strom I_a, in dem geschlossenen Zweig von Interesse.

	Abb. 5.4.: Die Ersatzspannungsquelle. Die Schaltung aus Abb. 5.3. wird in diese elektrisch gleichwertige Ersatzschaltung überführt.

Zuerst wird die Ersatzspannungsquelle U_0 berechnet. Sie entspricht der Spannung U ohne die Last des Widerstand R_a aus Abb. 5.3.

Der Parallelwiderstand R_1 hat keine Auswirkung auf die Schaltung. Das gilt ganz allgemein für Parallelwiderstände zu einer idealen Spannungsquelle und umgekehrt auch für Reihenwiderstände bei idealen Stromquellen.

Daher kann die Spannungsteilerregel angewendet werden:

$$U_0 = U_1 \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 20\text{V} \cdot \frac{10k\Omega}{90k\Omega + 10k\Omega} = 2\ \text{V}$$

Um den Innenwiderstand zu berechnen, ersetzt man die Spannungsquelle durch eine Drahtbrücke und berechnet das verbleibende Widerstandsnetzwerk. Da hier R_1 durch diesen Vorgang kurzgeschlossen wird, ergibt sich R_i aus der Parallelschaltung von R_2 und R_3:

$$R_i = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{90k\Omega \cdot 10k\Omega}{90k\Omega + 10k\Omega} = 9\ \text{k}\Omega$$

Mit den Werten für U_0 und R_i kann nun der Strom I_a und die Spannung U_a berechnet werden.

$$U_a = U_0 \cdot \frac{R_a}{R_i + R_a} = 2\text{V} \cdot \frac{9k\Omega}{9k\Omega + 9k\Omega} = 1\ \text{V} \qquad \text{und} \qquad I_a = \frac{U_a}{R_a} = \frac{1V}{9k\Omega} = 0{,}11\ \text{mA}$$

6. Ströme und Spannungen als Zeitfunktionen

Bisher wurden nur Gleichgrößen behandelt. Gleichgrößen sind Größen (z.B. Gleichspannung, Gleichstrom), die sich innerhalb eines Beobachtungszeitraums nicht verändern, d.h. innerhalb dieses Zeitraums sind keine Veränderungen meßbar. Gleichgrößen werden mit großen Buchstaben gekennzeichnet:

Gleichspannung	U = konst.
Gleichstrom	I = konst.

Zeitveränderliche Größen, Zeitfunktionen, ändern ihre Größe in einem Beobachtungszeitraum. Ihre elektrische Größe ist abhängig von der Zeit. Zur Unterscheidung von den Gleichgrößen werden sie mit kleinen Buchstaben gekennzeichnet:

u(t) oder u	Spannung als Funktion der Zeit
i(t) oder i	Strom als Funktion der Zeit

Im folgenden werden die wichtigsten Zeitfunktionen, die in der Elektrotechnik vorkommen, vorgestellt.

6.1. Schaltfunktionen

Beim Ein- und Ausschalten von Lasten (z.B. Widerständen) in elektrischen Netzwerken, kommt es zu sprungartigen Veränderungen von Strömen und Spannungen. Solche unstetigen Zeitfunktionen nennt man Schaltfunktionen.

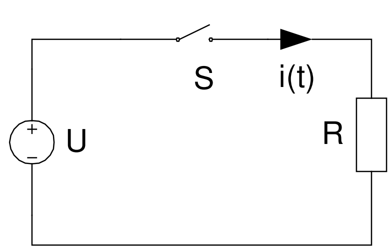


Abb. 6.1.: Schalplan

Abb. 6.2.: Graphische Darstellung des Einschaltvorgangs

$t < t_0$	Schalter S offen	$i(t) = 0$
$t > t_0$	Schalter S geschlossen	$i(t) = I_0$

6.2. Periodische Funktionen

Zeitfunktionen, deren Funktionswerte sich nach gleichbleibenden Abständen wiederholen, werden als periodische Funktionen bezeichnet.

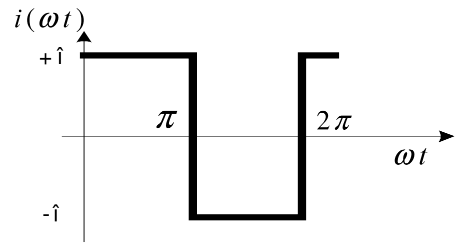


Abb. 6.3.: Rechteckschwingung

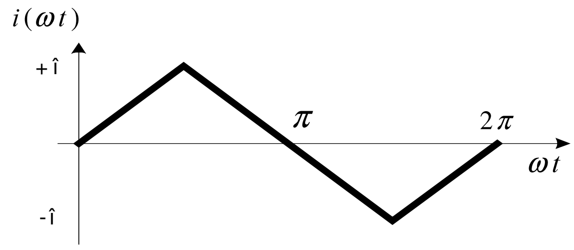


Abb. 6.4.: Dreieckschwingung

Die Gleichung für diese Funktionen lautet: $i(t) = i\,(t + T)$

Die Periodendauer T gibt an, nach welcher Zeit sich die Funktion wiederholt. Die Frequenz f ist der Kehrwert von T und gibt an wie oft in einer Sekunde die Funktion wiederholt wird. Die Einheit für die Frequenz ist Hertz [Hz].

$$f = \frac{1}{T}\,[\mathrm{Hz}] \qquad 1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$$

Der Scheitel- oder Maximalwert - die Amplitude - des Stromes (oder der Spannung) wird mit (+/-) î bezeichnet. Jeder momentane Wert zu einem Zeitpunkt t wird als Augenblickswert i bezeichnet.

6.3. Harmonische Funktionen

Harmonische Funktionen bezeichnen diejenigen zeitveränderlichen Größen, deren Zeitfunktionen durch die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus gegeben sind.

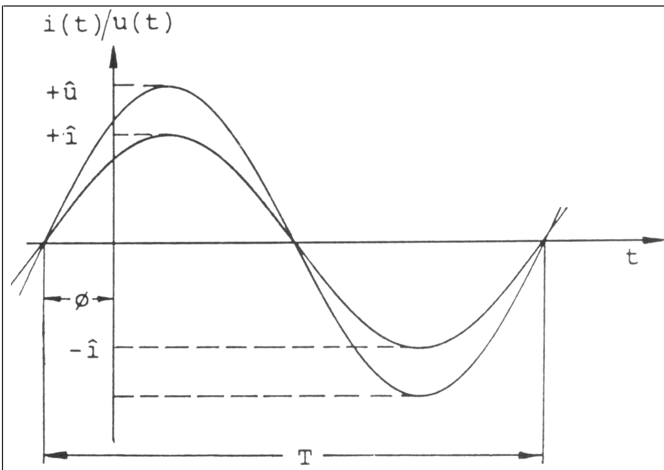


Abb.6.5.:

Wechselspannung und Wechselstrom

Die Gleichung für diese Zeitfunktion lautet: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

ω bezeichnet die Größe Kreisfrequenz oder auch Winkelgeschwindigkeit. Anschaulich bedeutet dies, daß der Zeiger im Einheitskreis mit dem Radius û den Weg $2 \times \pi$ in der Zeit 1/t zurücklegt. Daher auch der Ausdruck Winkelgeschwindigkeit.

Das Argument ωt der Winkelfunktion wird aus dem Produkt der Konstanten ω und der Variablen t gebildet. Es wird in Einheiten des Bogenmaßes ausgedrückt. Für die Frequenz f = 50 Hz ergibt sich z.B.:

$T = \frac{1}{f} = 0.02$ s (= 20ms)	t = 0.005 s	$\omega t = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{2}$	(90^0)
	t = 0.01 s	$\omega t = \pi$	(180^0)
	t = 0.02 s	$\omega t = 2\pi$	(360^0)

Der Phasenwinkel φ (griech. phi) wird ebenfalls im Bogenmaß angegeben und bezeichnet den Winkel zwischen der y - Achse und dem Nulldurchgang der Funktion von negativen zu positiven Werten. Er gibt an, um wieviel Grad im Bogenmaß die Sinusspannung aus der Nullage verschoben ist.

Nach exakt einer Periodendauer T, wird der Ausgangszustand der harmonischen Zeitfunktion wieder erreicht:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \hat{u} \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi)$$

t = 0: $$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 + \varphi) \quad = \quad \hat{u} \cdot \sin(\varphi)$$

t = T: $$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot T + \varphi) \quad = \quad \hat{u} \cdot \sin(2\pi + \varphi) \quad = \quad \hat{u} \cdot \sin(\varphi)$$

Die gleichen Funktionen gelten entsprechend auch für den Wechselstromverlauf (vergl. Abb. 6.5.):
$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \Phi)$

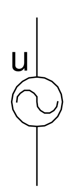


Abb. 6. 6.:
Ideale Wechselspannungsquelle

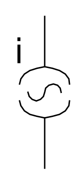


Abb. 6. 6.:
Ideale Wechselstromquelle

Die Abb. 6.6. und 6.7. zeigen die Schaltbilder einer idealen Wechselspannungs- bzw. Wechselstromquelle. Nimmt man den Vergleich mit dem geschlossenen Wasserkreislauf und der Pumpe, als anschauliche Erklärung eines elektrischen Stromkreises aus Abschnitt 1.3. noch einmal

auf, und zieht man die Zeitverläufe von Wechselstrom und - Spannung zur Betrachtung mit heran, so kann man sich eine Wechselspannungsquelle wie folgt vorstellen:
Beim Nulldurchgang der Spannung ist die Pumpe im Stillstand. Danach steigt die Kraft, mit der die Pumpe das Wasser im Kreislauf bewegt, langsam bis zu einem Maximum (û, î) an und fällt dann wieder ab, bis die Pumpe steht. Das entspricht dem zweiten Nulldurchgang der Spannung (Wechsel von positiven zu negativen Werten). Nun läuft die Pumpe in entgegengesetzter Richtung, bis zu einem Maximum (-û, -î) und wird dann wieder langsamer bis sie steht, um dann von neuem mit einem Durchlauf zu beginnen. Der Spannungsverlauf hat eine Periode T durchlaufen.
Durch die unterschiedliche Druckrichtung der Pumpe, wurde das Wasser erst in die eine Richtung und danach in die andere Richtung transportiert. Dies gilt auch für den Elektronentransport. Bis zum zweiten Nulldurchgang fließt der Strom in die eine Richtung, um danach, wegen der umpolarisierten Spannungsquelle in die andere Richtung zu fließen. Nach einer Periode T wird der Vorgang wiederholt.

7. Darstellung harmonischer Wechselgrößen

7.1. Zeitverlauf und Zeigerdarstellung von Sinusgrößen

Wechselspannungen werden mit Hilfe der Sinusfunktion (oder Kosinusfunktion) beschrieben. Die Gleichungen dazu lauten:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{bzw.} \qquad u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Mit Hilfe des Spannungs/Zeitdiagramms können solche Funktionen dargestellt werden. Diese Darstellung und die Berechnung elektrischer Schaltungen mit trigonometrischen Funktionen erweist sich als recht kompliziert.

Unter der Voraussetzung, daß es sich bei den betrachteten Spannungen und Strömen um harmonische Größen der gleichen Frequenz handelt, und die dazugehörigen Schaltungen aus ohmschen Widerständen, oder idealen Kondensatoren und Spulen (siehe Kapitel 10 und 11) bestehen, kann man die Zeigerdarstellung für die Darstellung von harmonischen Wechselgrößen wählen.

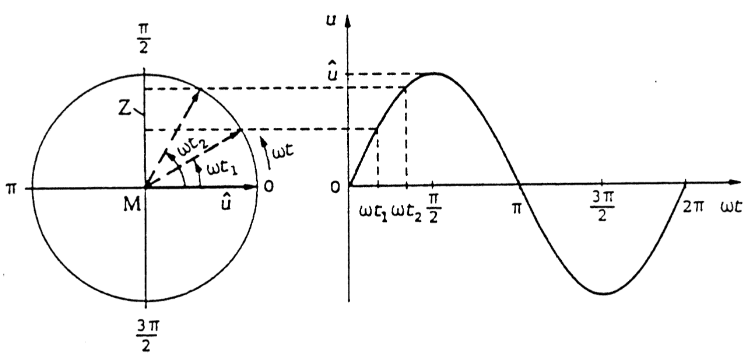


Abb. 7.1.:
Zeigerdarstellung und Zeitdiagramm

Die Zeitachse t, bzw. der überstrichene Winkel $(\omega t + \varphi)$, wird in einem Polardiagramm mit dem Umfang $2 \cdot \pi \cdot r$ (wobei r der Scheitelspannung û entspricht) dargestellt. Die zu einem beliebigen Zeitpunkt t_X vorhandene Spannung wird auf der vertikalen Achse aufgetragen (positiv oder negativ).

Es ergibt sich für eine Sinus- bzw. Kosinusfunktion ein Kreis mit dem Radius der maximalen Spannung û. Der mit der Geschwindigkeit ωt gegen den Uhrzeigersinn (mathematischer Drehsinn) drehende Zeiger, projiziert in jedem Moment t_X den Momentanwert der Wechselspannung auf die vertikale Achse. Somit kann die Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Spannung auch als Projektion der Momentanwerte auf den abgewickelten Umfang $2 \cdot \pi \cdot r$ (Zeitachse) verstanden werden.

Mit der Zeigerdarstellung ist es jetzt sehr einfach möglich, zwei oder mehrere harmonische Größen mit der gleichen Frequenz zu untersuchen.

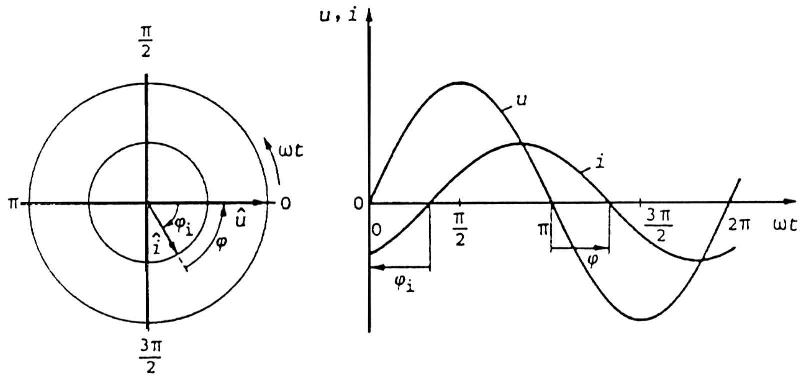


Abb. 7.2.:
Zeigerdiagramm für mehrerer harmonischer Größen

Von Interesse ist vor allem die zeitliche Relation der verschiedenen Größen. Da die Voraussetzung war, daß die Zeiger mit der gleichen Geschwindigkeit rotieren, wird die zeitliche Relation der verschiedenen Größen durch die Angabe der relativen Phasendifferenz vollständig beschrieben. Die Zeiger werden zum Zeitpunkt t = 0 eingetragen, und der relative Phasenwinkel kann dann direkt abgelesen werden.
Ebenso einfach lassen sich so z.B. verschiedene Spannungswerte $\hat{u}_i$ geometrisch, durch Ermittelung der resultierenden Spannung $\hat{u}_{ges}$ addieren.

7.2. Die komplexe Zahlenebene

Die Zeigerdarstellung ermöglicht eine vereinfachte Darstellung mehrerer harmonischer Größen. Ebenso ist es möglich, Spannungen oder Ströme gleicher Periodizität geometrisch zu addieren. In vielen Fällen wird aber eine arithmetische Berechnung verlangt. Eine vereinfachte mathematische Methode, harmonische Größen zu berechnen, ist die Darstellung dieser Größen durch komplexe Zahlen. Die formale Ähnlichkeit der Darstellung komplexen Zahlen mit der Zeigerdarstellung harmonischer Größen, führt zur Übernahme der komplexen Rechnung in der Elektrotechnik.

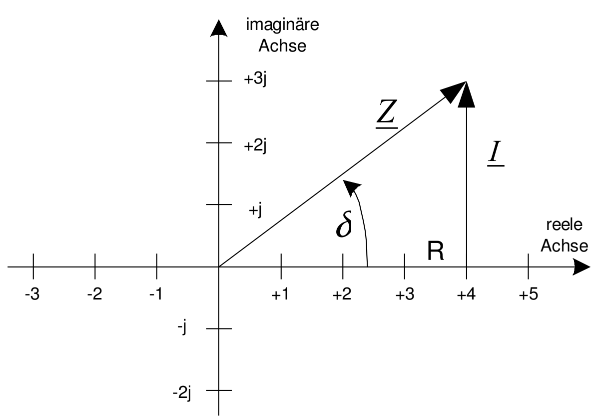


Abb. 7.3.:
Die komplexe Zahlenebene

Komplexe Zahlen werden als zweidimensionale Vektoren in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Sie bestehen aus einer reellen und einer imaginären Zahl. Dabei wird der Realanteil der

komplexen Zahl auf der reellen Zahlenachse (Abszisse), und der Imaginärteil der komplexen Zahl auf der imaginären Zahlenachse (Ordinate) aufgetragen.
Imaginäre Zahlen entstehen durch Multiplikation einer reellen Zahl mit dem Operator j. Die imaginäre Zahl j ist definiert als: $\sqrt{-1}$ = j >> j^2 = -1

In der herkömmlichen Arithmetik darf man nur aus positiven Zahlen Wurzeln ziehen.

Wird eine imaginäre und eine reelle Zahl addiert, erhält man eine komplexe Zahl, die durch ein unterstrichenes Symbol gekennzeichnet ist:

Reelle Zahl: R = 3.5
Imaginäre Zahl: I = 2.5j = j · X
Komplexe Zahl: $\underline{Z}$ = 2.5j +3.5 (vergl. Abb. 7.3.)

Diese Darstellung bezeichnet man als *Komponentenform.* Reelle und Imaginäre Zahlen stehen in der komplexen Zahlenebene einen Sonderfall dar: der Real- bzw. Imaginäranteil ist Null.

Betrag der komplexen Zahl (Abstand zum Ursprung)	**Richtungswinkel δ** (griech. Delta)**:**
$\lvert\underline{Z}\rvert = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$	δ = arc tan $\frac{X}{R}$ +K bzw. tan $\delta = \frac{X}{R}$ +K
(K = 0, wenn die komplexe Zahl im 1. oder 4. Quadranten (R > 0) und K = 180^0, wenn die komplexe Zahl im 2 oder 3. Quadranten der komplexen Zahlenebene liegt (K < 0).	

Wie in der Vektorrechnung kann der zweidimensionale Zeiger $\underline{Z}$ auch über seine Polarkoordinaten dargestellt werden. Er ist dann durch Angabe seiner Länge |$\underline{Z}$| und des Winkels δ vollständig beschrieben.

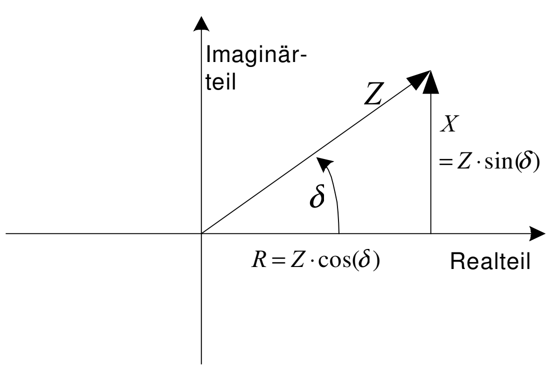


Abb. 7.4.:
Darstellung eines komplexen Zeigers mit Polarkoordinaten.

Berechnung des Realteils:	R = Z · cos(δ)
Berechnung des Imaginärteils:	X = Z · sin(δ)

Setzt man die Formel zur Berechnung von Real- und Imaginärteil aus Abb. 7.4. in die Formel für eine komplexe Zahl ein, erhält man:

$\underline{Z} \;=\; R + j \cdot X$

$\;\;\;\;\;= \; Z \cdot \cos(\delta) + j \cdot Z \cdot \sin(\delta) \;=\; Z \cdot (\cos(\delta) + j \cdot \sin(\delta))$

Nach dem Eulerschen Satz gilt: $\cos(\delta) + j \cdot \sin(\delta) \;=\; e^{j\delta}$

Damit lassen sich komplexe Zahlen auch Polar- oder Exponentialform darstellen: $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\,\delta}$

Jede komplexe Zahl läßt sich demnach in der Komponentenform oder in der Polarform darstellen. Für die Umrechnung von der einen Form in die andere Form benutzt man die angegebenen Gleichungen.

7.3. Komplexe Spannungen und Ströme

Wie bereits erwähnt, besteht eine starke formale Ähnlichkeit zwischen der Zeigerdarstellung und der Darstellung der komplexen Zahlen. Aus diesem Grunde werden harmonische Vorgänge mit Hilfe komplexer Größen beschrieben. Eine Wechselspannung mit der Spitzenspannung $\hat{u} = U = |\underline{U}|$ wird dann wie folgt beschrieben:

$\underline{U} = U \cdot e^{j\,\omega\,t\,+\,\Phi} = U \cdot (cos(\omega t + \varphi) + j \cdot sin(\omega t + \varphi))$

mit dem Realteil: $R = U \cdot cos(\omega t + \varphi)$

und dem Imaginärteil: $X = U \cdot sin(\omega t + \varphi)$

Der rotierende Zeiger wird erst in der Polarform und dann in der Komponentenform dargestellt. Die folgende Abbildung beschreibt anschaulich einen Zeiger, der im Zeitpunkt t = 0 einen Winkel φ mit der positiven realen Achse einschließt. Der eigentliche Zeiger $\underline{U}$ hat im Zeitpunkt t bereits den Weg ωt zurückgelegt (→ $\omega t + \varphi$). Realteil und Imaginärteil sind auch hier nur ein Spezialfall der komplexen Darstellung.

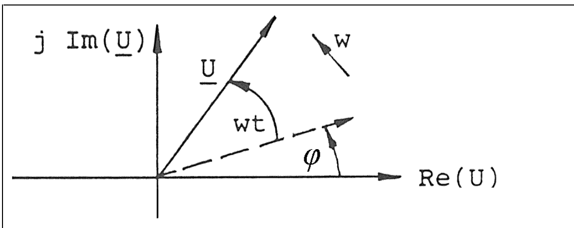
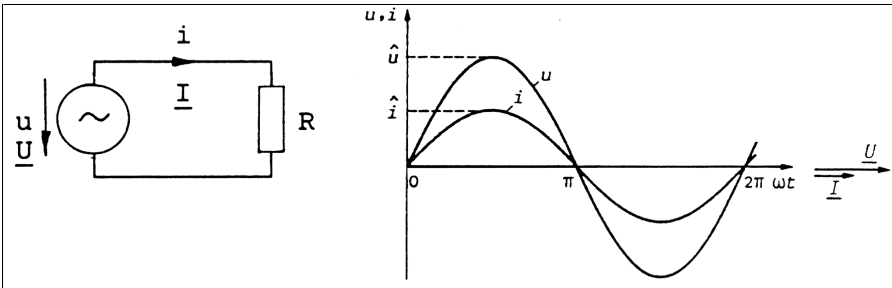


Abb. 7.5.:
Spannungszeiger in der komplexen Ebene

Entsprechend können andere harmonische Vorgänge beschrieben werden, also z.B. Strom oder Leistung.

7.4. Komplexe Widerstände

Wird eine Wechselspannung an einem ohmschen Widerstand R angeschlossen, ergibt sich folgender Spannungs- und Stromverlauf:

	Abb. 7.6.: Spannung und Strom am Widerstand

Für den Strom *i(t)* gilt: $i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\hat{u} \cdot \sin(\omega t)}{R}$

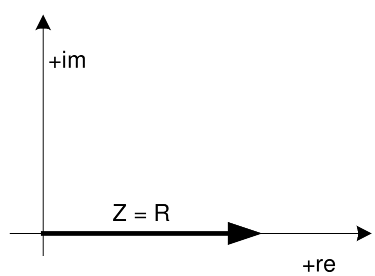
Der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung unterscheidet sich nur durch den Faktor 1/R. Strom und Spannung haben ihre Maxima, Minima und Nulldurchgänge zur gleichen Zeit, d.h. sie sind in Phase. Die Phasendifferenz zwischen ihnen ist damit Null.

In der komplexen Darstellung sieht der Sachverhalt so aus:

$\underline{U} = U \cdot e^{j\omega t} \quad \rightarrow \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{U \cdot e^{j\omega t}}{R}$

Der komplexe Widerstand Z ist in Anlehnung an die Gleichstromrechnung wie folgt definiert:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\omega t}}{\frac{U}{R} \cdot e^{j\omega t}}$$

 Abb. 7.7.: Zeigerdarstellung des komplexen Widerstands.	Der komplexe Widerstand Z eines ohmschen Widerstandes R ist rein reell (kein Imaginärteil). Der Zeiger zeigt somit in Richtung der positiven reellen Achse. Der ohmsche Widerstand wird auch als Wirkwiderstand bezeichnet.

Eine andere Bezeichnung für komplexe Widerstände ist der Begriff **Impedanz**. Im Gegensatz zu komplexen Strömen und Spannungen, die einen bestimmten Zeitverlauf besitzen, sind die im Rahmen dieses Scriptes verwendeten Impedanzen zwar komplex, aber zeitunabhängig!

7.5. Rechengesetze für komplexe Zahlen

Für verschiedene Rechenoperationen benötigt man die konjugiert komplexen Zahlen. Zu jeder komplexen Zahl $\underline{Z}$ lässt sich eine konjugiert komplexe Zahl $\underline{Z}^*$ angeben. Beide unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils:

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = Z \cdot e^{j\,\delta} \qquad \underline{Z}^* = R - j \cdot X = Z \cdot e^{-j\,\delta}$$

Die **Addition** (und entsprechend die Subtraktion) von komplexen Zahlen wird in der Komponentenform durchgeführt.	$\underline{Z}_1 = R_1 + j \cdot X_1$ $\underline{Z}_2 = R_2 + j \cdot X_2$	$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ $= R_1 + R_2 + j\,(X_1 + X_2)$
Die **Multiplikation** erfolgt am besten in der Polarform. Die Beträge werden multipliziert und die Richtungswinkel addiert:	$\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\,\delta 1}$ $\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\,\delta 2}$	$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$ $= (Z_1 \cdot e^{j\,\delta 1}) \cdot (Z_2 \cdot e^{j\,\delta 2})$ $= Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^{j\,(\delta 1 + \delta 2)}$
Bei der **Division** in der Polarform werden die Beträge dividiert und die Richtungswinkel subtrahiert:	$\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\,\delta 1}$ $\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\,\delta 2}$	$\underline{Z} = \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \dfrac{Z_1 \cdot e^{j\delta 1}}{Z_2 \cdot e^{j\delta 2}}$ $= \dfrac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j\,(\delta 1 - \delta 2)}$
Multiplikation in Komponentenform	$\underline{Z}_1 = R_1 + j \cdot X_1$ $\underline{Z}_2 = R_2 + j \cdot X_2$	$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$ $= (R_1 + j \cdot X_1) \cdot (R_2 + j \cdot X_2) \qquad (j \cdot j = -1)$ $= R_1R_2 - X_1X_2 + j \cdot (R_1X_2 + R_2X_1)$
Division in Komponentenform		$\underline{Z} = \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \dfrac{R_1 + j \cdot X_1}{R_2 + j \cdot X_2}$ Nach der Division in der Komponentenform läßt sich die reelle und imaginäre Komponente in diesem Ausdruck nicht erkennen. Zu ihrer Ermittlung muß man Nenner und Zähler mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners erweitern. $\underline{Z} = \dfrac{R_1 + j \cdot X_1}{R_2 + j \cdot X_2} \cdot \dfrac{R_2 - j \cdot X_2}{R_2 - j \cdot X_2}$ $= \dfrac{R_1R_2 + X_1X_2}{R_2^2 + X_2^2} + j \cdot \dfrac{R_2X_1 + R_1X_2}{R_2^2 + X_2^2}$

Beispielrechnung mit komplexen Zahlen:

Gegeben: $\underline{Z}_1 = 1 + 2j$ $\underline{Z}_2 = 4 + 3j$	Multiplikation in Komponentenform: $\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$ $= (1 + 2j) \cdot (4 + 3j)$ $= 4 + 3j + 8j + 6j^2$ $= -2 + 11j$	Betrag und Phase: $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2{,}23$ $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $\delta_1 = \text{arc tan}\,(\frac{X_1}{R_1}) = \text{arc tan}\,(\frac{2}{1}) = 63^0$ $\delta_2 = \text{arc tan}\,(\frac{X_2}{R_2}) = \text{arc tan}\,(\frac{3}{4}) = 37^0$ damit gilt: $\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\,\delta 1} = 2{,}23 \cdot e^{j\,63\cdot}$ $\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\,\delta 2} = 5 \cdot e^{j\,37\cdot}$
	Multiplikation in Polarform: $\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$ $= Z_1 \cdot e^{j\,\delta 1} \cdot Z_2 \cdot e^{j\,\delta 2}$ $= 2{,}23 \cdot e^{j\,63\cdot} \cdot 5 \cdot e^{j\,37\cdot}$ $= 11{,}15 \cdot e^{j\,100\cdot}$	Rücktransformation in Komponentenform: $R = Z \cdot \cos(\delta) = 11{,}15 \cdot \cos(100^0) = -2$ $X = Z \cdot \sin(\delta) = 11{,}15 \cdot \sin(100^0) = 11$ $\underline{Z} = R + j \cdot X$ $= -2 + 11j$

8. Beurteilung zeitlich sich ändernder Größen über Mittelwerte

8.1. Berechnung der "mittleren" Leistung bei Gleich- und Wechselspannung

Bisher wurde ausschließlich der Scheitelwert û oder î der zeitlich sich ändernden Größe angegeben. Dieser Scheitelwert, oder auch Amplitude oder Spitzenwert der Zeitfunktion genannt, wird in jeder Periode wieder erreicht und stellt ein Maß für die Intensität dar.
In der Regel sagt dieser Spitzenwert jedoch verhältnismäßig wenig über die im zeitlichen Mittel an einem ohmschen Widerstand abgegebene Leistung aus, da er nur kurzzeitig als Maximalwert zur Verfügung steht. Es wird daher ein Mittelwert gesucht, der ein zu der Leistung an einem ohmschen Widerstand bei Gleichspannung und -strom vergleichbares Ergebnis liefert.

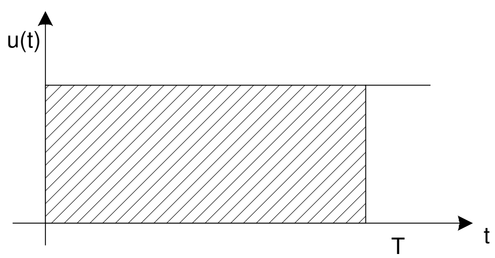


Abb. 8.1.:
Die Leistung P an einem ohmschen Widerstand bei konstanter Spannung über die Zeit T. Es gilt:

$$P = \frac{U \cdot I \cdot T}{T} = \frac{U^2}{R} = I^2 R$$

Bei einer sich zeitlich ändernden Rechteckspannung an einem ohmschen Widerstand ergibt sich dann folgender Zeitverlauf der Leistung:

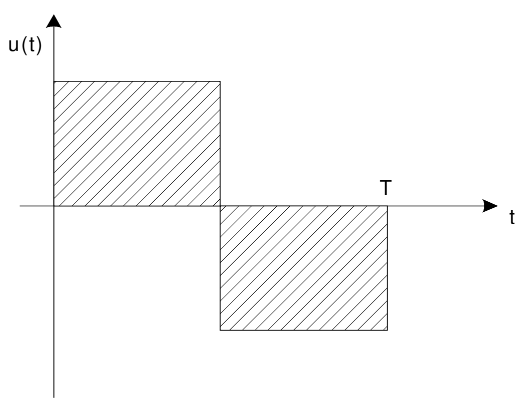


Abb. 8.2.:
Ohmsche Leistung bei sich ändernder Spannung, hier bei einer Rechteckspannung.
Zur Berechnung unterteilt man die Periode in Intervalle von jeweils $\frac{T}{2}$. Eingesetzt in die vorherige Formel ergibt sich:

$$P = \frac{\frac{(\hat{u})^2}{R} \cdot \frac{T}{2} + \frac{(-\hat{u})^2}{R} \cdot \frac{T}{2}}{T} = \frac{(\hat{u})^2}{R}$$

In ähnlicher Weise geht man bei der Leistungsberechnung für einen an einer Wechselspannungsquelle liegenden Widerstand vor. Nur wird hier das Intervall T in viele unendlich kleine Teilstücke unterteilt und die Ergebnisse anschließend aufintegriert:

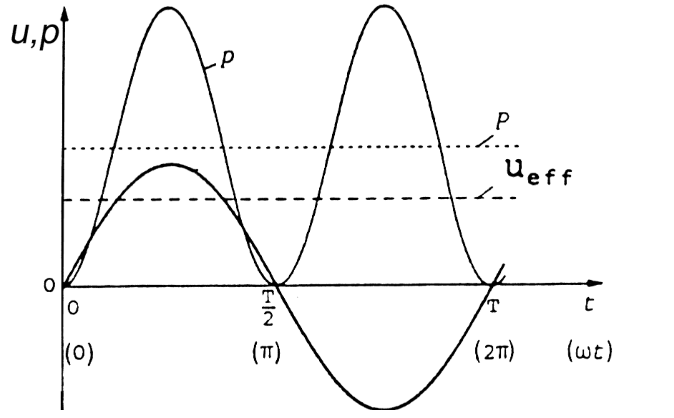


Abb. 8.3.:
Die Leistung bei Wechselspannung und ohmscher Last.

Die Leistungsformel ergibt sich dann wie folgt:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\frac{(u(t))^2}{R}dt = \frac{1}{T\cdot R}\int_{t=0}^{T}(\hat{u})^2\sin^2(\omega t)dt$$

$$= \frac{(\hat{u})^2}{T\cdot R}\cdot\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T$$

$$= \frac{(\hat{u})^2}{T\cdot R}\cdot\left(\frac{T}{2}-\frac{T}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi T}{T}\right)-0+\frac{T}{8\pi}\sin(0)\right)$$

$$= \frac{(\hat{u})^2}{2\cdot R} = \frac{(u_{eff})^2}{R}$$

8.2. Die Referenzspannung u_{eff} - Effektivwert

In der oberen Leistungsformel taucht eine neue Größe auf, der **Effektivwert** der Spannung. Diese Referenzspannung ist so definiert, daß eine Wechselspannungsquelle mit der Effektivausgangsspannung u_{eff} an einem ohmschen Widerstand die gleiche Leistung umsetzt wie eine Gleichspannungsquelle mit der Ausgangsspannung $U = U_{eff}$.
Für sinusförmige Spannungen und Ströme gilt:

$$\boldsymbol{u_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = \hat{u}\cdot 0.707} \qquad \boldsymbol{i_{eff} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} = \hat{\imath}\cdot 0.707}$$

Der Effektivwert kann auch über folgende Integrale berechnet werden.

$u_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (u(t))^2dt}$	$i_{eff} = I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (i(t))^2dt}$

8.3. Der arithmetische Mittelwert

Der arithmetische **ū** ist der zeitlich lineare Mittelwert der Zeitfunktion:

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt \qquad \bar{\imath} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt$$

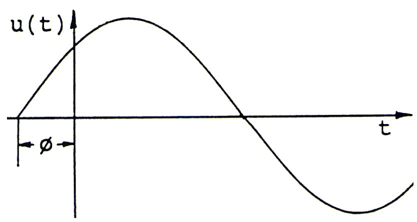
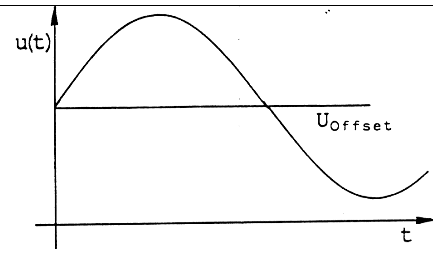
	

Abb. 8.4. Der arithmetische Mittelwert. $U_{Mittel} = 0$	Abb. 8.5. Der arithmetische Mittelwert bei einer überlagerten Gleichspannung. $U_{Mittel} = U_{Offset}$

Für die beiden dargestellten Spannungen errechnet sich der Mittelwert folgendermaßen:

Beispiel 8.4.: $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{u} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)dt \quad = \quad \frac{\hat{u} \cdot T}{2\pi T}\left[-\cos(2\pi\frac{t}{T})\right]_0^T$$

$$= \frac{\hat{u}}{2\pi} \cdot (-\cos(2\pi) + \cos(0)) = 0$$

Beispiel 8.5.: Einer Wechselspannung u ist eine Gleichspannung U_0 überlagert. Es ergibt sich:

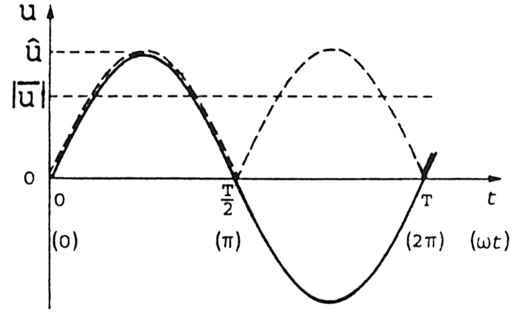
$u = U_0 + \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T (U_0 + \hat{u} \cdot \sin(\omega t))dt$$

$\bar{u} = U_0$ (vergl. Bsp. 8.4.)

8.4. Der Gleichrichtmittelwert

Der Gleichrichtmittelwert ist definiert als der zeitlich lineare Mittelwert der Beträge der Zeitfunktion. Er stellt das arithmetische Mittel der Beträge der Spannungen dar und ist z.B. für den Betrieb von Gleichrichterschaltungen von Bedeutung.

Abb. 8.6.: Der Gleichrichtwert $\left\|\overline{u}\right\| = \frac{1}{T}\int_0^T \left\|u(t)\right\| dt$	

8.5. Bezeichnungen und Konventionen

Aus Normierungsgründen wird für die zukünftige Darstellung von harmonischen Wechselgrößen festgelegt, daß der komplexe Wert mit einem unterstrichenen Großbuchstaben (z.B. $\underline{U}$, $\underline{I}$) dargestellt wird. Abweichend von der bisherigen Darstellung, soll für den Betrag der jeweiligen Größe (z.B. U, I) nicht mehr der Spitzenwert (û, î), sondern der Effektivwert (u_{eff} = U, i_{eff} = I) verwendet werden. Da sich die beiden Werte allein um den Faktor $\sqrt{2}$ unterscheiden, wird durch diese Festlegung keine prinzipielle Änderung eingeführt.

9. Der Kondensator

9.1. Das elektrische Feld

Wie im Kapitel 1.1. dargestellt, bestehen Atome aus Protonen, Elektronen und Neutronen. Das Elektron ist der Träger der kleinstmöglichen negativen elektrischen Ladung ($e = 1.602 \times 10^{-19}$ As). Das Proton trägt die gleiche positive Elementarladung. Ist die Anzahl der Protonen nicht gleich der Anzahl der Elektronen, spricht man von elektrisch geladenen Körpern. Mit der Ladungsmenge eines Raumes wird der Betrag der insgesamt vorhandenen positiven Ladungsträger, abzüglich der insgesamt vorhandenen negativen Ladungsträger, bezeichnet. Eine Ladungsmenge kann somit insgesamt elektrisch positiv oder negativ sein.
Elektrische Ladungen üben gegenseitig Kräfte aufeinander aus. Die Ursache dafür ist, daß jede elektrische Ladung den sie umgebenden Raum in einen bestimmten Zustand versetzt, der durch diejenige Kraft nachgewiesen wird, die er auf eine andere Ladung im Raum ausübt. Gleiche Ladungen 'stoßen' sich deswegen ab, und ungleiche Ladungen 'ziehen' sich an. Dieser Raumzustand wird als elektrisches Feld bezeichnet. Wird dieses Feld von ruhenden Ladungen erzeugt, spricht man vom elektrostatischen Feld.
Dieser Zustand der Materie läßt sich z.B. erzeugen, indem man zwei elektrisch leitende, sich nicht berührenden Platten mit einer Spannungsquelle verbindet.

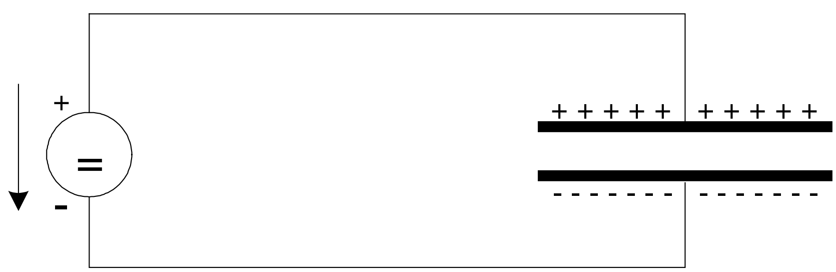


Abb. 9.1.: Spannungsquelle am Plattenkondensator.

Unter Einwirkung der Spannung U werden von der Platte, die am Pluspol der Spannungsquelle liegt, Elektronen abgezogen (freie Ladungsträger im Metall) und zur anderen Platte transportiert. Damit ist die eine Platte positiv geladen (+Q) und die andere Platte negativ (-Q). Dieser Zustand bleibt erhalten, wenn die Spannungsquelle von den Platten getrennt wird. Um die Platten herum hat sich ein elektrisches Feld aufgebaut. Zwischen den Platten besteht ein homogenes elektrisches Feld, d.h. die Feldlinien zeigen alle in eine Richtung, von +Q nach -Q.

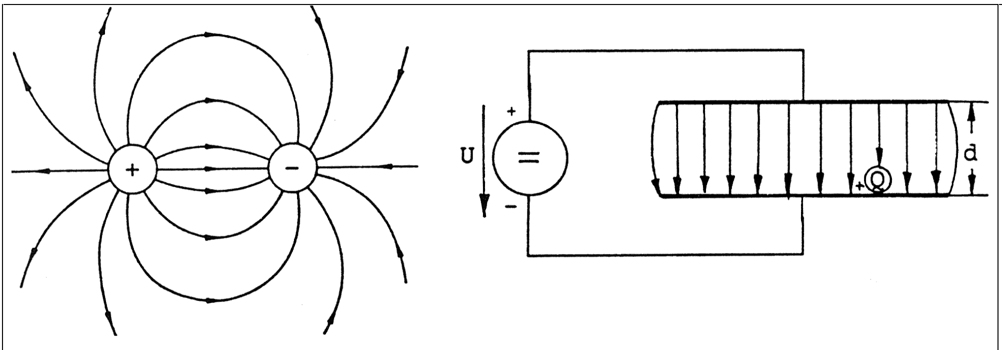


Abb. 9.2.: Elektrische Felder

Bringt man einen punktförmigen Ladungsträger mit der Ladung $+Q$ in das Feld ein, so wird auf diesen Körper eine Kraft in Richtung negativer Elektrode (Platte) ausgeübt. Die Größe der Kraft hängt von der Probeladung $+Q$ und der Stärke des elektrischen Feldes ab. Die elektrische Feldstärke ist definiert als Quotient aus der Kraft F und der Ladung Q.

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$ [Vm^1] $[\frac{N}{As} = \frac{V \cdot A \cdot s}{m \cdot As} = \frac{V}{m}]$	Die Schreibweise gibt an, daß es sich um gerichtete Größen, Vektoren, handelt: $\vec{E}$ = Feldstärke, $\vec{F}$ = Kraft, (Q = Ladung)

Die zwischen den Platten des Plattenkondensators vorhandene Feldstärke E ist außerdem definiert als Quotient der angelegten Spannung U und dem Plattenabstand d:

$E = \frac{U}{d}$ [Vm^{-1}]	E = Feldstärke, U = Spannung, d= Plattenabstand

9.2. Die Kapazität des Kondensators, Bauformen

Das Verhältnis zwischen der Ladungsdifferenz Q und der angelegten Spannssung U bezeichnet man als Kapazität C. Sie ist ein Maß für das Fassungsvermögen des Kondensators, d.h. welche Ladungsmenge pro Volt angelegter Spannung gespeichert werden kann. Die Einheit ist F, Farad.

$C = \frac{Q}{U}$ [F] [F = $\frac{As}{V}$]	E = Feldstärke, U = Spannung, d= Plattenabstand

Die Kapazität des Kondensators ist u.a. abhängig von seiner Bauform und den verwendeten Isoliermaterialien zwischen den beiden Platten.

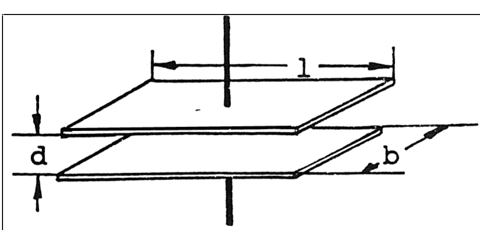


Abb. 9.3.: Der Plattenkondensator (Bauform)

Der Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Platten, die durch ein isolierendes Medium voneinander getrennt sind. Die Kapazität ist um so größer, je größer die Fläche A der Platten ist und je geringer der Plattenabstand d ist. Außerdem hängt sie von dem verwendeten Isoliermaterial ab. Daraus folgt :

$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$ [F]	ε = Dielektrizitätskonstante, sie setzt sich zusammen aus: $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ wobei: ε_0 = Dielektrizitätskonstante des Vakuums $= 8{,}85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm}\right]$ oder $0{,}885 \cdot 10^{-13} \left[\frac{As}{Vcm}\right]$ ε_r = relative Dielektrizitätskonstante

Die Dielektrizitätskonstante ε ist eine Materialkonstante, die die Isoliereigenschaft der verschiedenen Isoliermaterialien in die Kapazität einbringt. Sie setzt sich zusammen aus der Dielektrizitätskonstante des Vakuums ε_0, und der relativen Dielektrizitätskonstante ε_r, die beschreibt, um welchen Faktor die Dielektrizitätskonstante des betreffenden Materials von der des Vakuums ε_0 abweicht.

Material	**relative Dielektrizitätskonstante ε_r**
Luft	1
Papier	5...6
Hartpapier	4...8
Glimmer	6...8
Polystyrol	2,4
Keramik	6...10000
Tantaloxyd	27.3

Der Wickelkondensator ist praktisch ein aufgewickelter Plattenkondensator. Er besteht aus einer Isolierfolie, auf die dünne Metallbeläge aufgetragen werden (z.B. Aluminium). Der so entstandene Kondensator wird aufgewickelt, in einem Gehäuse verpackt, und anschließend werden die Enden der Elektroden mit Anschlußdrähten versehen.
Der Elektrolytkondensator ist ähnlich aufgebaut. Seine Isolierschicht besteht aus einer dünnen elektrolytisch erzeugten Schicht, z.B. Aluminiumoxid. Damit kann man hohe Kapazitätswerte bei kleinen Bauformen herstellen, insbesondere, wenn man statt Aluminium/Aluminiumoxid Tantal/Tantaloxid verwendet. Im Gegensatz zu anderen Kondensatoren ist der Elektrolytkondensator auf Grund seiner Herstellungsweise polarisiert, d.h. er besitzt einen Plus- und einen Minuspol.

9.3. Dynamisches Verhalten von Kondensatoren

Wird ein Kondensator über eine Spannungsquelle geladen oder über einen Verbraucher R entladen, so finden die Ausgleichsvorgänge nicht unmittelbar, sondern über einen größeren Zeitverlauf statt. Erst dann ist der Kondensator geladen oder entladen.

Verallgemeinert man die Formel aus der Elektrostatik auf das zeitliche Verhalten, so gilt:

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

Der Strom $i(t)$ gibt allgemein die geflossene Ladungsmenge pro Zeiteinheit an. Mathematisch wird dieser Zusammenhang durch die Ableitung nach der Zeit ausgedrückt:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d(C \cdot u(t))}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Für die Spannung folgt daraus:

$$\mathrm{u(t)} = \frac{1}{C} \int i(t)dt$$

Über diesen mathematischen Zusammenhang läßst sich der Entladevorgang (und äquivalent der Ladevorgang) eines Kondensators über einen Widerstand berechnen:

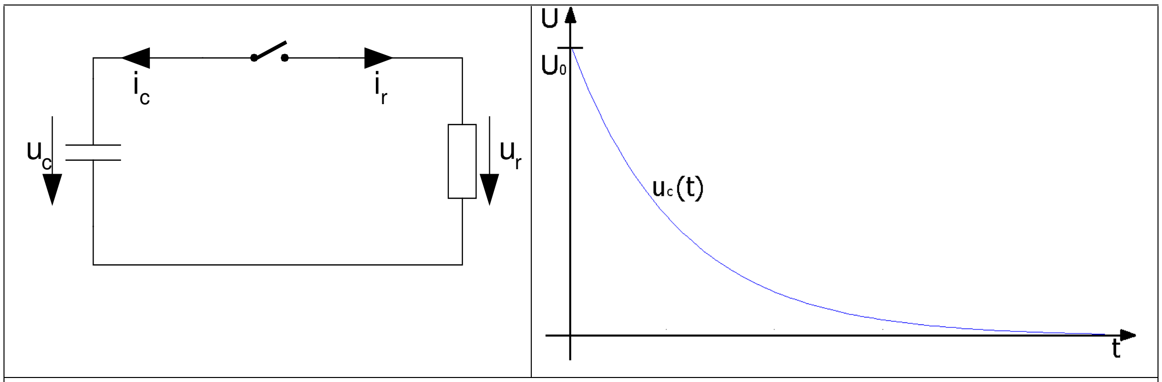


Abb. 9.4.: Der Entladevorgang eines geladenen Kondensators

Es gilt:	Daraus folgt:	Das Integral entspricht:
$u_c\,(t = 0) = U_0$ $u_c\,(t) = u_r\,(t)$ $i_c\,(t) = -\,i_r\,(t)$ $i_r\,(t) = \frac{u_r(t)}{R}$	$u_c\,(t) = -\frac{1}{C}\int i_c dt$ $= -\frac{1}{C}\int \frac{u_c(t)}{R}\,dt$ $= -\frac{1}{C \cdot R}\int_{t=0}^{\infty} u_c(t)\,dt$	$u_c\,(t) = U_0 \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$

Die Entladekurve der Spannung am Kondensator zeigt einen exponentiellen Verlauf. Betrachtet man den Verlauf der Spannung und des Stromes beim Laden eines Kondensators (Abb. 9.5.), sieht man, daß der Strom sofort auf seinen maximalen Wert 'springt', um dann langsam auf Null abzufallen. Im Gegenzug steigt die Spannung langsam auf den Wert der angelegten Spannung U_0 an.

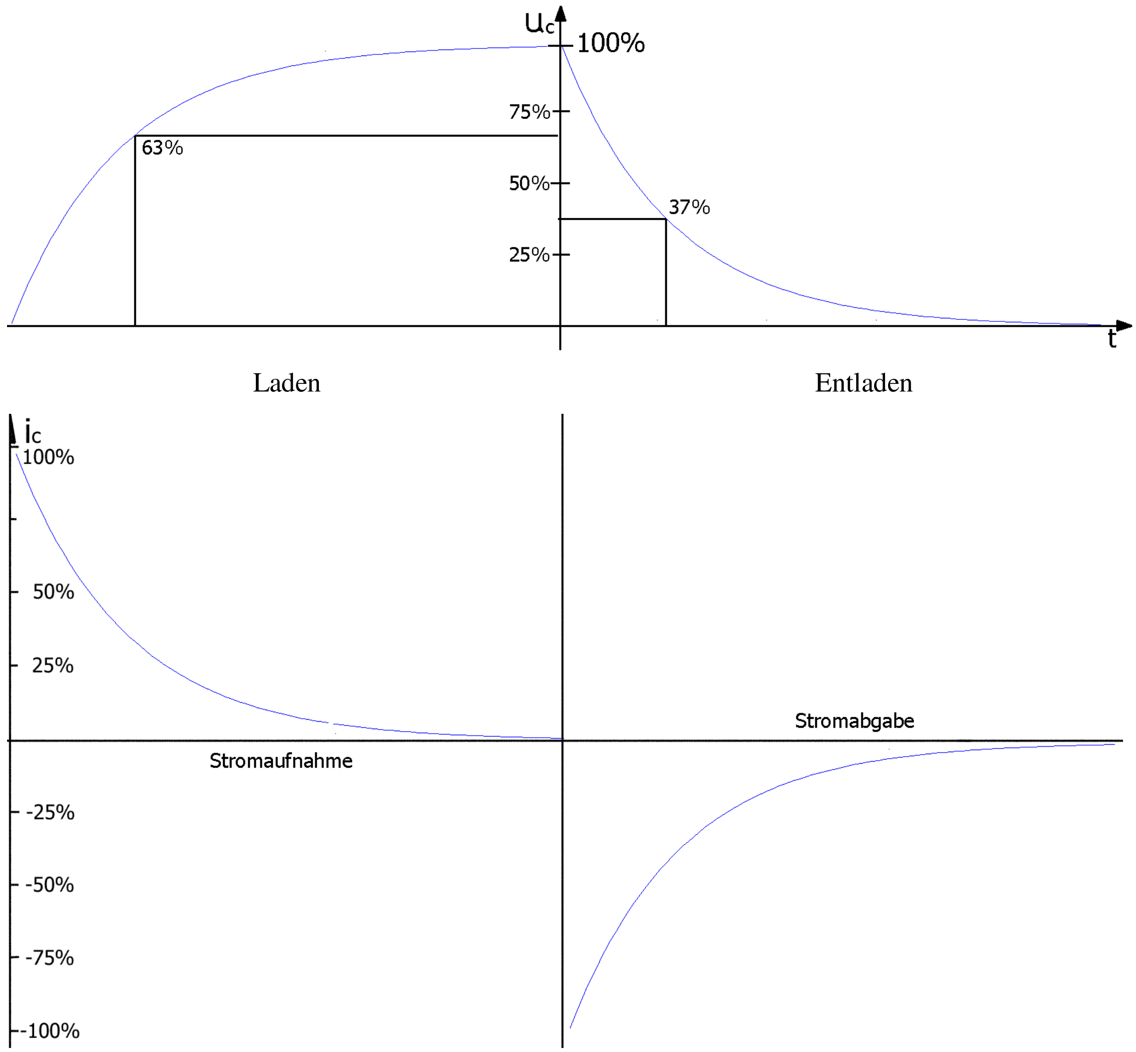


Abb. 9.5.:

Spannungsverlauf (oben) und Stromverlauf (unten) beim Laden und Entladen eines Kondensators.

Die Ursache dafür ist, daß der Ausgleich der Ladungsmengen in einer bestimmten Zeit vor sich geht. Diese Zeitkonstante τ (griech. Tau) ergibt sich aus der oberen Formel wie folgt:

$$\tau = R \cdot C \quad [s] \qquad [1s = 1\,\Omega \cdot 1F = 1\,\frac{V \cdot As}{A \cdot V}]$$

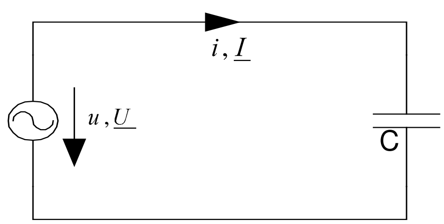
Diese Zeit τ errechnet sich aus dem Produkt des zum Entladen (Laden) verwendeten Widerstandes R und der Kapazität C. Sie gibt für den Entladevorgang die Zeit an, bis zu der ein Kondensator auf 37% der Spannung U_0 entladen ist. Beim Ladevorgang gibt sie die Zeit an, bis zu der ein Kondensator auf 63% der angelegten Spannung U_0 aufgeladen ist. Auch die Entladung über eine Kurzschlussbrücke besitzt eine Zeitkonstante, die durch den Widerstand der Brücke und des real vorhandenen Innenwiderstandes des Kondensators bestimmt wird.

Laden		Entladen	
Spannung	Strom	Spannung	Strom
$u_c = U_0 \cdot (1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$	$i_c = I_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$	$u_c = U_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$	$i_c = -I_0 \cdot (e^{\frac{-t}{\tau}})$
Anfangsstromstärke: $I_0 = \frac{U_0}{R}$		Zeitkonstante: $\tau = R \cdot C$	

Abb. 9.6.: Übersicht über die Formeln zum Laden und Entladen eines Kondensators.

9.4. Der Kondensator im Wechselstromkreis

Liegt ein Kondensator an einer sinusförmigen Wechselspannung, so wird er ständig geladen und entladen, da die Polarität der Spannungsquelle ständig mit der Frequenz wechselt. Im folgenden soll untersucht werden, wie sich der Strom an einem idealen Kondensator bei einer sinusförmigen Wechselspannung verhält. Idealer Kondensator bedeutet, daß der Wechselstromwiderstand des Kondensators keine Wirkwiderstandsanteile besitzt (vergl. unten).



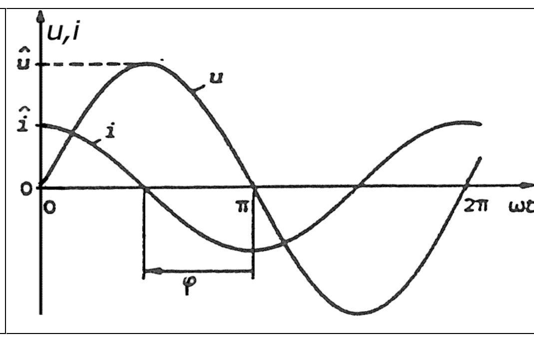


Abb. 9.7.: Spannung und Strom am Kondensator

Aus dem Verhalten des Kondensators beim Laden und Entladen, ist auf das Verhalten des Stromes bei sinusförmiger Wechselspannung an einem Kondensator zu schließen. Der Strom 'eilt' der Spannung voraus (siehe Abb. 50). Mathematisch betrachtet heißt dies:

$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$	$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$ $= C \cdot \frac{d(\hat{u} \cdot \sin(\omega t))}{dt}$ $= \hat{u} \cdot \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t)$	$i(t) = \hat{\imath} \cdot \cos(\omega t)$ für $\hat{\imath} = \hat{u} \cdot \omega \cdot C$
In der komplexen Darstellung: $\underline{U} = \mathrm{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$	$\underline{I} = \mathrm{C} \cdot \frac{d\underline{U}}{dt}$ $= U \cdot j \cdot \omega \cdot C \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ $= \cdot j \cdot \omega \cdot C \cdot \underline{U}$	

Strom und Spannung am idealen Kondensator sind also im -90° (-π/2) phasenverschoben. In der Zeigerdarstellung läuft der komplexe Stromzeiger um 90° im mathematischen Drehsinn dem komplexen Spannungszeiger voraus.

Die Impedanz des Kondensators ergibt sich dann folgendermaßen:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{-j}{\omega \cdot C} = X_C$$

Der Leitwert ergibt sich durch:

$$B_C = \frac{1}{X_C} = j\,\omega\,C$$

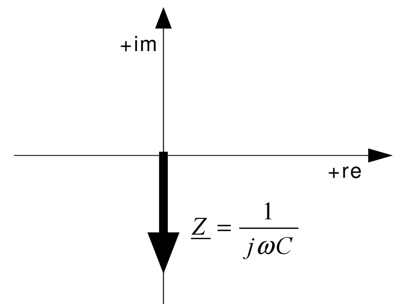


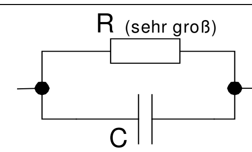
Abb. 9.8.: Die komplexe Impedanz des Kondensators

Der Zeiger des komplexen Widerstands des Kondensators zeigt in Richtung der negativen imaginären Achse. Man bezeichnet ihn auch als kapazitiven Blindwiderstand. Der ideale Kondensator besitzt keinen Realanteil. Der Betrag des kapazitiven Blindwiderstandes ist definiert:

$$|Z| = X_C = \frac{1}{\omega C} \quad [\Omega]$$

Wie aus der Gleichung hervorgeht, steigt der Blindwiderstand des Kondensators mit fallender Frequenz und kleiner werdender Kapazität.

Jeder nicht-ideale Kondensator besitzt zusätzlich zum kapazitiven Blindwiderstand einen Parallelwiderstand. Über diesen entlädt sich ein einmal aufgeladener Kondensator im Laufe der Zeit (Gleichstromkreis).



Im Wechselstromkreis entsteht somit ein Scheinwiderstand bzw. ein Scheinleitwert Y ($Y = \frac{1}{Z}$), der sich aus dem ohmschen Parallelleitwert G und dem Blindleitwert B_C zusammensetzt.

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{G^2 + B_C^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} - (\omega C)^2} \qquad [\Omega]$$

(genaueres dazu vergl. Kap. 12, RLC-Netzwerke)

Der Parallelleitwert ist in der Regel sehr klein (bzw. der Parallelwiderstand sehr groß) und damit kann man in den meisten Fällen $Z = X_c$ setzen (d.h. $G = 0$).
Der Scheinwiderstand ergibt sich auch aus dem Quotienten von Effektivspannung durch Effektivstrom.

$$Z = \frac{U}{I} \qquad [\Omega]$$

10. Leistung im Wechselstromkreis

10.1. Der Leistungsbegriff

Wie im ersten Kapitel dargestellt wurde, ist die Leistung das Verhältnis von Arbeit (bzw. Energie) und Zeit. Dabei kann Leistung 'aufgebracht' und 'verbraucht' werden. Physikalisch ist das natürlich nicht richtig, denn Energie kann weder erzeugt werden, noch verloren gehen, sondern nur in andere Energieformen umgewandelt werden. Die elektrischen Kraftwerke liefern elektrische Energie, dabei wird physikalisch nur eine Umwandlung der in Kohle, etc. vorhandenen chemischen Energie vorgenommen. Auf der Abnehmerseite gibt es Verbraucher, wie z.B. Elektroherde, Kühlschränke, Glühlampen usw., die Leistung aufnehmen. Auch hier wird nur eine Umwandlung in Wärme oder andere Energiearten durchgeführt.
Das bedeutet, dort, wo elektrische Energie produziert wird, liegt eine Quelle vor, Leistung wird abgegeben (z.B. Batterie), dort, wo elektrische Energie verbraucht wird, liegt ein Verbraucher vor, Leistung wird aufgenommen (z.B. Widerstand R).

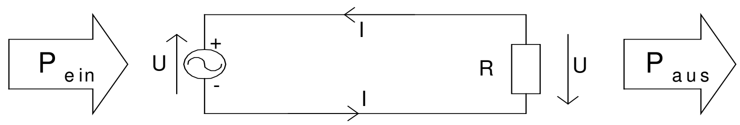


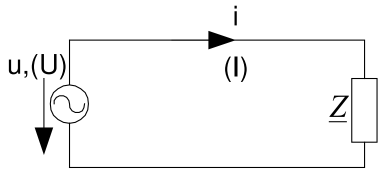
Abb. 10.1.:
Leistungsfluß

10.2. Momentanleistung, Wirkleistung, Blindleistung

Während nach Anlegen einer Gleichspannung an ein Netzwerk ein stabiler Zustand erreicht wird, d.h. die Ströme und Spannungen in den Zweigen des Netzwerkes sind zeitunabhängig konstant, trifft das bei Wechselstrom nicht mehr zu. Bei Wechselstrom hängt der Verlauf der Momentanleistung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

sowohl von der Frequenz, als auch von der Phasenlage von Strom und Spannung ab.



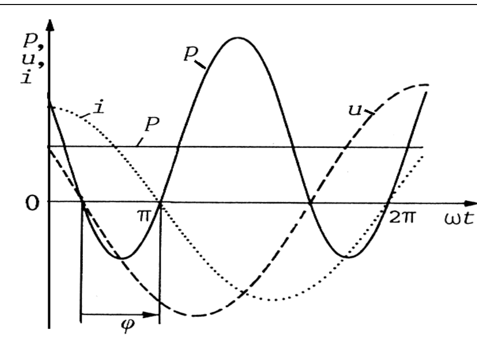


Abb. 10.2.:
Leistung im Wechselstromkreis

Die Momentanleistung errechnet sich dann wie folgt (man beachte, daß nach Abb. 10.2. mit dem *cos* gerechnet wird):

$i(t) = i_0 \cdot cos(\omega t)$	nach dem Additionstheorem gilt:
$u(t) = u_0 \cdot cos(\omega t + \Phi)$	$cos(\alpha) + cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot (cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta))$
$p(t) = u(t) \cdot i(t)$	daraus folgt:
$= u_0 \cdot i_0 \cdot cos(\omega t + \Phi) \cdot cos(\omega t)$	$p(t) = \frac{1}{2} \cdot u_0 \cdot i_0 \cdot (cos(\Phi) + cos(2\omega t + \Phi))$

Die Momentanleistung p(t) setzt sich demnach zusammen aus der

zeitunabhängigen Wirkleistung *P* und	der zeitabhängigen Leistung $P^{\sim}$
$P = \frac{1}{2} \cdot u_0 \cdot i_0 \cdot cos(\Phi)$ $= u_{eff} \cdot i_{eff} \cdot cos(\Phi)$	$P^{\sim} = u_{eff} \cdot i_{eff} \cdot cos(2\omega t + \Phi)$

Die Wirkleistung *P* gibt an, wieviel Leistung im Mittel von der Quelle an den Verbraucher abgegeben wird. Die Leistung, die zwischen Verbraucher und Quelle hin- und her- „gepumpt" wird, kann von diesem Wert allerdings erheblich (höher) abweichen. Negative Momentanleistung besagt dann, daß Leistung vom Verbraucher zur Quelle transportiert wird. Diese Leistung wird Blindleistung *Q* genannt.

10.3. Die (komplexe) Scheinleistung

An eine beliebigen Verbraucher liegt dies Spannung : $\underline{U} = U \cdot e^{j\Phi u}$

Durch diesen Verbraucher fließt der Strom : $\underline{I} = I \cdot e^{j\Phi i}$

Der Spannungszeiger beinhaltet in diesen Fällen nicht den zeitlichen Verlauf, was durch das Fehlen der Kreisfrequenz angezeigt wird. U und I sind Effektivwerte.

Die Spannung besitzt gegenüber dem Strom die Phasendifferenz: $\Phi = \Phi_u - \Phi_i$

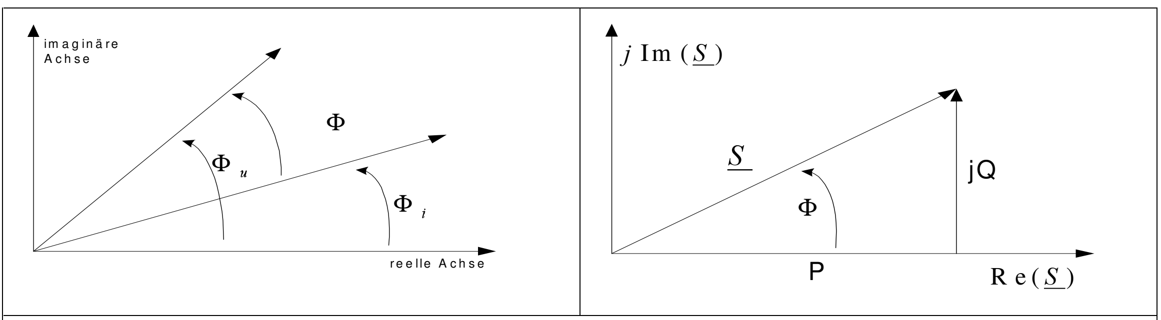


Abb. 10.3.: Komplexe Darstellung der Leistung

Bildet man willkürlich die zum Stromverlauf $\underline{I}$ konjugiert komplexe Größe $\underline{I}^* = I \cdot e^{-j\Phi i}$ und multipliziert man diese mit der Spannung $\underline{U}$, so ergibt sich die komplexe Scheinleistung $\underline{S}$:

$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$ $= U \cdot I \cdot e^{j\Phi} \cdot e^{-j\Phi i}$ $= U \cdot I \cdot e^{j(\Phi u - \Phi i)}$ $\underline{S} = U \cdot I \cdot e^{j\Phi}$	Trennt man diesen Ausdruck mit Hilfe der Eulerschen Formel, so ergibt sich die komplexe Scheinleistung $\underline{S}$ zu: $\underline{S} = U \cdot I \cdot (cos(\Phi) + j \cdot sin(\Phi))$ $= U \cdot I \cdot cos(\Phi) + j \cdot U \cdot I \cdot sin(\Phi))$ ergibt sich: $\underline{S} = P + j \cdot Q$ mit Realteil P = $U \cdot I \cdot cos(\Phi)$ *und* Imaginärteil Q = $U \cdot I \cdot sin(\Phi))$

Auf diese Weise hat man Wirkleistung und Blindleistung getrennt. Wie sich zeigt, ist der Realteil die Wirkleistung P, während der Imaginärteil die Blindleistung Q darstellt.

Die Größe $S = U \cdot I$ (Multiplikation von Effektivspannung und Effektivstrom) wird Scheinleistung genannt. Diese Größe ist für die Bemessung von elektrischen Maschinen usw. wichtig, die unabhängig vom Phasenwinkel für bestimmte Ströme und Spannungen dimensioniert werden müssen. Man muß hier beachten, daß die Scheinleistung stets höher als die Wirkleistung ist.

10.4. Einheiten

Die Scheinleistung ergibt sich als Produkt aus den Effektivwerten U und I. Sie wird in Volt-Ampère gemessen.	$S = U \cdot I$	*[VA]*
Die Wirkleistung ergibt sich aus der Scheinleistung und dem Phasenwinkel zwischen U und I. Sie wird in Watt angegeben.	$P = S \cdot cos(\Phi)$	*[W]*
Die Blindleistung ergibt sich entsprechend. Sie wir in var (Volt-Ampère reaktiv [reaktiv (lat.) = rückwirkend]) angegeben.	$Q = S \cdot sin(\Phi)$	*[var]*

Aus Abb. 10.3. lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

Scheinleistung:	$S^2 = P^2 + Q^2$	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
Wirkleistung:	$cos(\Phi) = \frac{P}{S}$	$P = U \cdot I \cdot cos(\Phi)$
Blindleistung:	$sin(\Phi) = \frac{Q}{S}$	$Q = U \cdot I \cdot sin(\Phi)$
Phasenwinkel Φ:	$tan(\Phi) = \frac{Q}{p}$	$\Phi = arctan\left(\frac{Q}{p}\right)$

11. Die Spule

11.1. Das magnetische Feld

Ein stromdurchflossener Leiter übt auf einen anderen stromdurchflossenen Leiter eine Kraft in der Art aus, daß sich die beiden Leiter, je nach Stromrichtung in diesen Leitern, anziehen oder abstoßen. Die Ursache dafür ist, daß jeder elektrische Strom den ihn umgebenden Raum in einen Raumzustand versetzt, den man als magnetisches Feld bezeichnet. Jede sich bewegende elektrische Ladung verursacht ein magnetisches Feld.

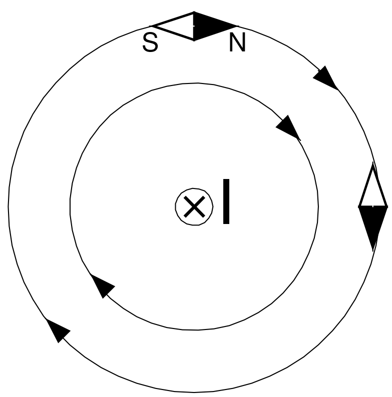


Abb. 11.1.:

Feldverlauf eines stromdurchflossenen Leiters.

N steht für Nordpol

S steht für Südpol

Der Leiter in der Mitte, durch den der Strom I fließt, ist mit einem Kreuz markiert. Dadurch wird symbolisiert, daß der Strom „in die Zeichenebene“ hineinfließt. Würde der Strom in entgegengesetzter Richtung fließen, wäre der Leiter mit einem Punkt in der Mitte $\odot$ markiert.

Bringt man eine Magnetnadel in das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters, so zeigt sich, daß die magnetischen Feldlinien den Leiter kreisförmig umgeben. Die Richtung des Feldes ist abhängig von der Stromrichtung. Sie läßt sich über die sog. „Rechtsschraubenregel“ ableiten. Man denkt sich eine normale Schraube (mit Rechtsgewinde), die in Richtung des Stroms in den Leiter hineingeschraubt wird. Die Drehrichtung der Schraube gibt dann die Richtung der Feldlinien an.
Der Richtungssinn der Feldlinien wurde so festgelegt, daß sie in Richtung des Nordpols der Magnetnadel zeigen.

11.2. Die magnetischen Feldgrößen

Das magnetische Feld läßt sich erheblich verstärken, wenn man den Leiter zu einer Spule aufwickelt.

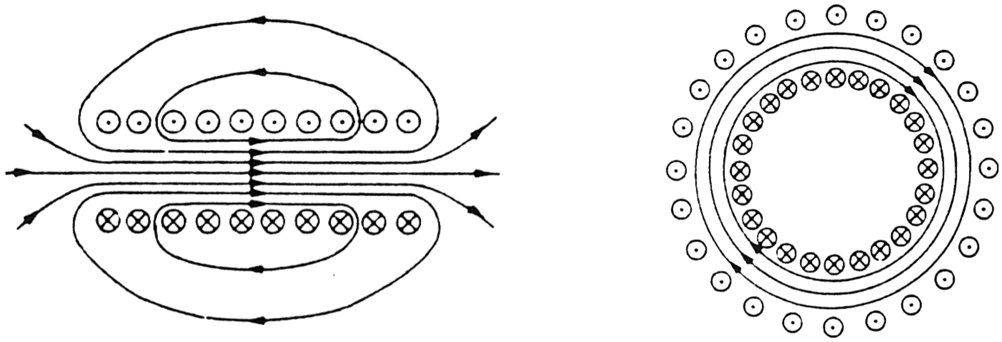


Abb. 11.2.: Verlauf des Magnetfelds in Spulen. Links ist eine Zylinderspule, rechts eine Ringkernspule dargestellt.

Die Stärke des magnetischen Feldes wird als magnetische Feldstärke H bezeichnet. Sie ist abhängig vom Strom I, der Windungszahl N und der Länge der Spule l.

$$\mathrm{H} = \frac{I \cdot N}{l} \qquad [\frac{A}{m}]$$

Das Produkt aus Strom I und Windungszahl N wird auch als elektrische Durchflutung θ (grich. Theta) bezeichnet. Es ergibt sich:

$$\theta = I \cdot N \qquad bzw. \qquad H = \frac{6}{l}$$

Die Feldstärke *H* gibt nicht die Kraftwirkung des Magnetfeldes wieder, da diese Kraftwirkung auch noch vom Material abhängt, das vom Magnetfeld durchdrungen wird. Zur Beschreibung der Stärke des Magnetfeldes verwendet man die magnetische Flußdichte oder magnetische Induktion *B*. Die magnetische Flußdichte wird in Tesla [T] angegeben. Die unabhängig voneinander definierten Feldgrößen *H* und *B* sind durch die Größe μ (Permeabilität) miteinander verbunden.

$$B = \mu \cdot H \qquad [\mathrm{T}] \qquad \left(1\mathrm{T} = 1\ \frac{Vs}{m^2}\right)$$

Die Permeabilität μ beinhaltet die magnetischen Eigenschaften des Raumes, in dem sich das Magnetfeld ausbreitet. Eine Zylinderspule mit einem Eisenkern hat z.B. ein erheblich kräftigeres Magnetfeld als eine Luftspule. Die Permeabilität μ setzt sich zusammen aus der magnetischen Feldkonstante μ_0 und der Permeabilitätszahl μ_r. μ_0 ist die Permeabilität des Vakuums, und μ_r beschreibt die Permeabilität verschiedener Stoffe relativ zu der des Vakuums.

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \qquad [\frac{Vs}{Am}] \qquad \mu = \frac{B}{H} \qquad \left[\frac{\frac{Vs}{m^2}}{\frac{A}{m}} = \frac{Vs}{Am}\right] \qquad \mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \text{ bzw } \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \qquad [\frac{Vs}{Am}]$$

Wie aus der Gleichung hervorgeht ist μ_r dimensionslos. Laut Definition ist μ_r im Vakuum 1.0. Das gilt fast für alle anderen Stoffe, außer den ferromagnetischen Stoffen, wie Eisen, Kobalt oder Nickel. bei denen μ_r sehr viel größer als 1.0 ist.

Permeabilitätszahlen μ_r					
Ferromagnetische Stoffe		Paramagnetische Stoffe		Diamagnetische Stoffe	
Eisen, unlegiert	bis 6000	Luft	1,000 0004	Quecksilber	0,999 975
Elektroblech	> 6500	Sauerstoff	1,000 0003	Silber	0,999 981
Eisen-Nickel Leg.	bis 300 000	Aluminium	1,000 022	Zink	0,999 988
Weichmag. Ferrite	> 10 000	Platin	1,000360	Wasser	0,899 991

Die Flußdichte B im magnetischen Feld kann als Feldliniendichte angesehen werden. Der magnetische Fluß Φ (grich. Phi) beschreibt die Menge der Feldlinien, die durch eine Fläche A hindurchtreten.

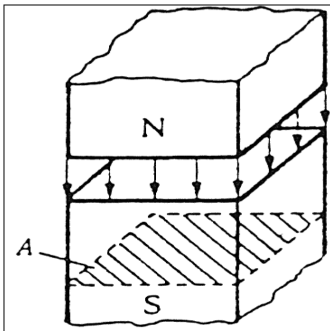


Abb. 11.3.:
Der magnetischer Fluß im homogenen Feld.
Zwischen den Polen eines Magneten, im Luftspalt, besteht ein homogenes Feld mit der Flußdichte B.

Wenn A die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche ist, gilt für den magnetischen Fluß Φ :

$$\Phi = B \cdot A \qquad [\mathrm{Wb}] \qquad (1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{Vs} = \frac{Vs}{m^2} \cdot m^2)$$

Die Einheit des magnetischen Flusses wird in Weber [Wb] angegeben. Durch Einsetzung der Formeln für B ergibt sich:

$$\Phi = \mu \cdot H \cdot A = \mu \cdot \frac{A \cdot N \cdot I}{l} \qquad [\mathrm{Wb}]$$

mit N = Windungszahl der Spule und l = Länge der Zylinderspule oder mittlerer Umfang der Ringspule.

11.3. Die Speicherwirkung der Spule

In Kap. 9.3. wurde beschrieben, daß der Kondensator in der Lage ist, Ladungen zu speichern. In einem Netzwerk mit sich ändernden Strömen und Spannungen entnimmt der Kondensator dem Netzwerk Energie und speichert sie in Form eines elektrischen Feldes. Bei einer Änderung der am Kondensator anliegenden Spannung muß zunächst das elektrische Feld im Kondensator abgebaut bzw. verstärkt werden. Entsprechend verhält sich der Entlade- bzw. Ladestrom .

Ein analoges Verhalten existiert für das magnetische Feld der Spule. Wie das elektrische Feld des Kondensators speichert das magnetische Feld der Spule Energie. Ändert sich der eingespeiste Strom i, so muß sich auch der vom Strom erzeugte magnetische Fluß Φ ändern, weil

→ $$\Phi = \mu \cdot \frac{A \cdot N \cdot i}{l}$$

Durch die Stromänderung verändert sich das magnetische Feld, es ändert seine Größe oder seine Richtung. Aufgrund der Veränderung des magnetischen Feldes entsteht eine Spannung, sie wird induziert.

→ $$u(t) \approx N \cdot \frac{d\phi}{dt}$$ (das Vorzeichen ist abhängig vom Betrieb als Generator oder Verbraucher)

Man bezeichnet diesen Vorgang als Selbst- oder Eigeninduktion. Diese Selbstinduktion wirkt dem Abbau des magnetischen Feldes und damit einer Stromänderung entgegen.

Allgemein werden in einem bewegten Leiter in einem statischen Magnetfeld Kräfte auf die im Material vorhandenen Ladungsträger ausgeübt. Das gleiche gilt für einen ruhenden Leiter in einem bewegten Magnetfeld und damit auch für einen ruhenden Leiter in einem sich ändernden Magnetfeld, weil es nur auf die Relativbewegung zwischen Magnetfeld und Ladungsträgern ankommt.

Diese Kraft nennt man Lorentzkraft. Sie steht stets senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen und senkrecht zu den Feldlinien des Magnetfeldes. Damit erfährt das Elektron eine Ablenkung senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung. In einem elektrischen Leiter kann dies zu einer Verschiebung der Ladungsträger in Richtung des Leiters führen, und damit zu Potentialunterschieden (elektrische Spannung) an den Leiterenden. Auf diese Art funktioniert z.B. ein Dynamo oder ein Generator. Die Lorentzkraft ist Null, wenn das Elektron ruht oder sich parallel zu den Feldlinien bewegt.

Der Ausdruck Selbstinduktion besagt also, daß in der Spule selbst eine Spannung durch die Änderung des magnetischen Flusses induziert wird. Die Induktionsspannung der Spule wird auch wie folgt beschrieben:

→ $$u(t) \approx L \cdot \frac{di}{dt}$$ (das Vorzeichen ist wiederum abhängig vom Betrieb als Generator oder Verbraucher)

Die Konstante *L* wird als Selbstinduktivität bezeichnet und ist eine Größe, die vom mechanischen Aufbau der Spule, wie Drahtmaterial, Spulenkern, Windungszahl und Querschnittsfläche abhängt. Die Einheit für die Selbstinduktivität ist Henry [H]. Für die Induktivität der idealen Ringspule (ohne Kern) gilt:

$$L = N^2 \cdot \frac{\mu \cdot A}{l} \ [\mathrm{H}] \qquad (1\mathrm{H} = 1\ \frac{Vs}{A})$$

11.4. Dynamisches Verhalten von Spulen

Wird eine Spule an eine Spannungsquelle und einen Widerstand *R* angeschlossen, so wird das magnetische Feld nicht unmittelbar, sondern aufgrund der induzierten Spannung über einen gewissen Zeitverlauf aufgebaut. Dadurch kann sich auch der die Spule durchfließende Strom erst allmählich steigern. Es gilt:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \qquad bzw. \qquad i(t) = \frac{1}{L} \int u(t)dt$$

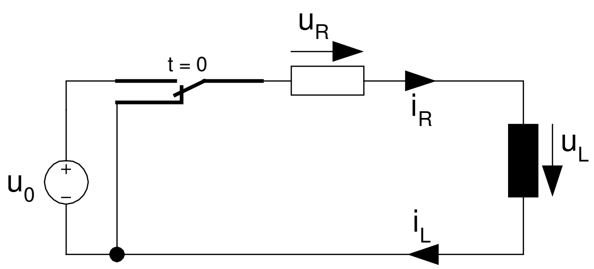
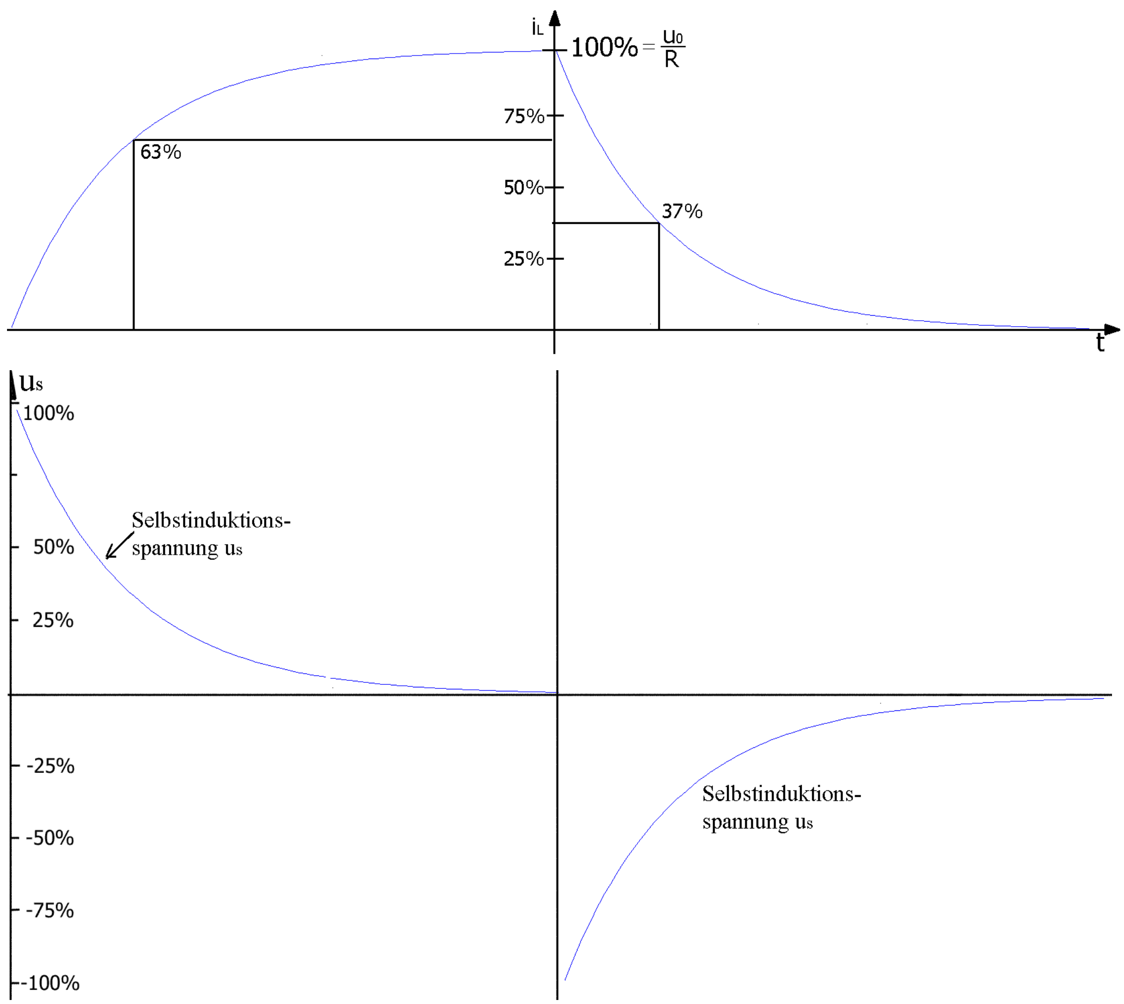


Abb. 11.4.:
Der Einschalt- und Ausschaltvorgang an einer idealen Spule. Darstellung des Stroms (oben) und der Selbstinduktionsspannung (unten).



Der Einschaltvorgang an der Spule läßt sich in ähnlicher Weise wie beim Kondensator berechnen. Wenn u_0 die Spannung der Spannungsquelle ist, gilt:

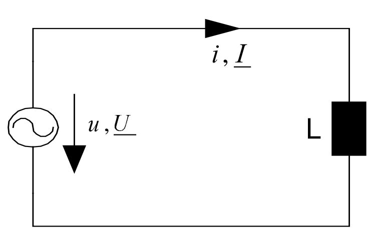
	Daraus folgt:	Das Integral entspricht:
$i_L(t=0) = 0$ $i_L(t) = i_R(t)$ $u_L(t) = u_0 - u_R(t)$ $u_R(t) = i_R(t) \cdot R$	$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L dt$ $= \frac{1}{L}\int (u_0 - u_R(t))dt$ $= \frac{1}{L}\int (u_0 - (R \cdot i_L(t)))dt$	$i_L(t) = i_{max.} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t})$ mit $i_{max} = \frac{u_0}{R}$

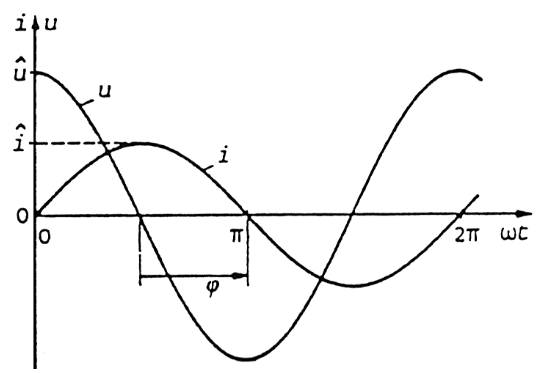
Der Strom erreicht erst nach einer gewissen Zeit seine maximale Höhe. Man sagt auch die Spannung eilt dem Strom voraus. Die Zeit, die benötigt wird, 63% des maximalen Stroms zu erreichen, läßt sich hier als Quotient aus Induktivität und Widerstand $\tau = \frac{L}{R}$ bestimmen.

11.5. Die Spule im Wechselstromkreis

Im folgenden soll untersucht werden, wie sich die Spannung bei sinusförmigem Strom an der idealen Spule verhält.

Abb. 11.5.:
Die Spule im Wechselstromkreis.





Das sich ständig ändernde Magnetfeld der Spule führt zu einer ständigen Selbstinduktionspannung in der Spule. Dadurch kann sich der Strom immer erst allmählich aufbauen.

$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t)$	$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ $= L \cdot \frac{d(\hat{\imath} \cdot \sin(\omega t))}{dt}$	*daraus folgt:* $u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$ für $\hat{u} = \hat{\imath} \cdot \omega \cdot L$

	$= \hat{\imath} \cdot \omega \cdot L \cdot cos(\omega t)$	
In der komplexen Darstellung: $\underline{I} = I \cdot \; e^{j \cdot \omega \cdot t}$	$\underline{U} \;= L \cdot \frac{d\underline{I}}{dt}$ $= \cdot j \cdot \omega \cdot L \cdot \; e^{j \cdot \omega \cdot t}$ $= \cdot j \cdot \omega \cdot L \cdot \; \underline{I}$	

Strom und Spannung sind phasenverschoben, und zwar um $\delta = 90°$ bzw. $\delta = \pi/2$. In der Zeigerdarstellung läuft der Spannungszeiger dem Stromzeiger in mathematischen Drehsinn voraus.

Die komplexe Impedanz der Spule ergibt sich aus:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L \;= X_L$$

Der Leitwert ergibt sich aus

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$$

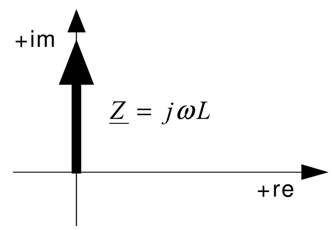
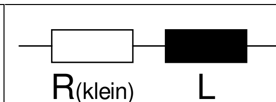


Abb. 11.6.: Die komplexe Impedanz der idealen Spule

Der Zeiger des komplexen Widerstands der idealen Spule zeigt in Richtung der positiven imaginären Achse (Kondensator: negative imaginäre Achse). Man bezeichnet ihn auch als induktiven Blindwiderstand.

Jede reale Spule besitzt zusätzlich zum induktiven Blindwiderstand X_L (Induktivität) einen Wirkwiderstand R, der in etwa dem Widerstand der Spule im Gleichstromkreis entspricht.	

Im Wechselstromkreis entsteht somit ein Scheinwiderstand Z, der sich aus Wirk- und Blindwiderstand zusammensetzt: $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ [Ω] (genaueres dazu vergl. Kap. 12, RLC-Netzwerke)

Der Wirkwiderstand der Spule ist im allgemeinen im Verhältnis zum Blindwiderstand sehr klein - man kann daher in den meisten Fällen $Z \approx X_L$ setzen.
Der Scheinwiderstand der Spule ergibt sich auch aus dem Quotienten von Effektivspannung und Effektivstrom. $Z = \frac{U}{I}$ [Ω]

11.6. Der Transformator

Zwei magnetisch gekoppelte Spulen werden als Transformator oder Übertrager bezeichnet. Dies wird meistens durch die Anordnung zweier Spulen auf einem gemeinsamen Kern (vergl. Abb. 11.6.) realisiert. Ein Transformator dient zur Umwandlung von Spannungen, zur Impedanzanpassung und zur Potentialtrennung.

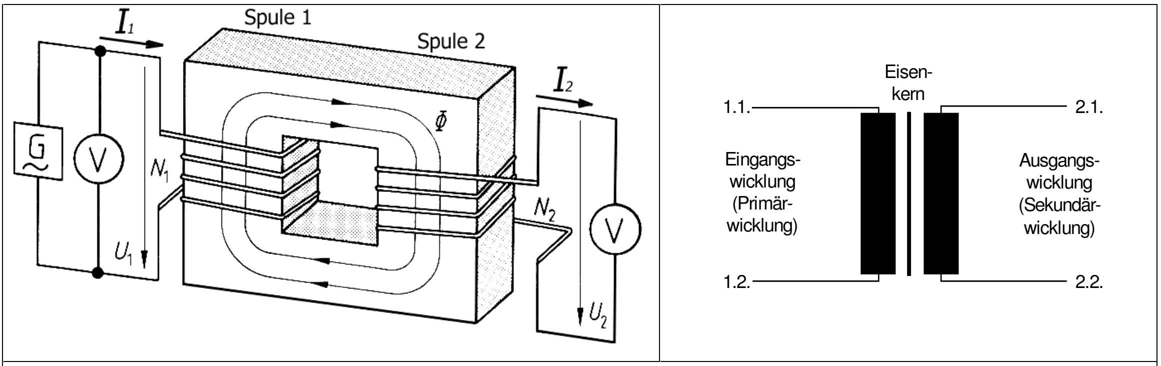


Abb. 11.6.: Aufbau und Schaltbild eines Transformators.

Fließt Strom durch Spule 1, so verläuft ein Teil des von dieser Spule erzeugten Flusses auch durch Spule 2. Ändert sich der Strom I_1 durch Spule 1, so tritt nicht nur Selbstinduktion auf (vergl. Kap 11.3.), sondern es wird auch in Spule 2 eine Spannung induziert. Diese bezeichnet man als Gegeninduktionsspannung, der Vorgang wird Gegeninduktion genannt.

<table>
<tr><td rowspan="2">Die Selbstinduktions- und die Gegeninduktionsspannung in Spule 2 werden über ähnliche Formeln erfaßt. Die Größe M_{12} bezeichnet man als Gegeninduktivität. Sie hat dieselbe Einheit wie die Selbstinduktivität und wir analog zur Induktivität über
$$M_{12} = N_2 \cdot \frac{d\Phi}{di_1}$$ berechnet.
(M_{12} = Gegeninduktivität, N_2 = Anzahl der Windungen)</td><td>Selbstinduktion:
$$u_{S1}(t) = L_1 \cdot \frac{di_{S1}}{dt}$$</td></tr>
<tr><td>Gegeninduktion:
$$u_{GS2}(t) = M_{12} \cdot \frac{di_{S1}}{dt}$$</td></tr>
</table>

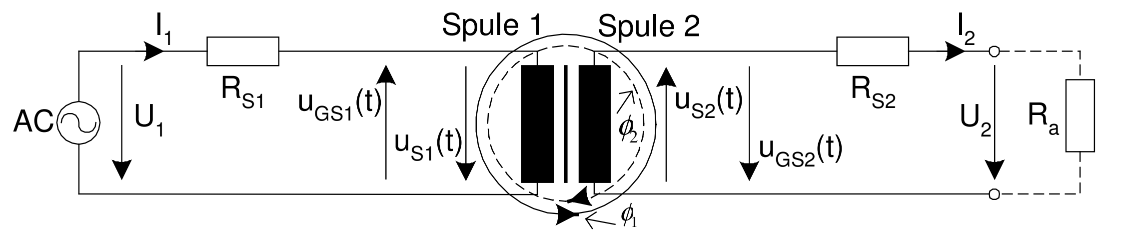
Wird Spule 2 nicht belastet (offene Anschlüsse), fließt kein Strom. Es gilt: $u_{S1}(t) = u_{GS2}(t)$

Wird Spule 2 durch z.B. einen Widerstand belastet, fließt ein Strom, der selber eine magnetischen Fluß Φ erzeugt. In Spule 2 wird dadurch eine Selbstinduktionsspannung erzeugt.

Es gilt: $u_{S2}(t) = L_2 \cdot \frac{di_{S2}}{dt}$

Gleichzeitig erzeugt durch die Kopplung der beiden Spulen dieser Fluß jedoch auch eine Gegeninduktionsspannung in Spule 1, die analog mit $u_{GS1}(t) = M_{21} \cdot \frac{di_{S2}}{dt}$ beschrieben wird.

Abb. 11.7.: Induktionsspannungen in einem belasteten Transformator.



$u_{S1}(t)$	-	Selbstinduktionsspannung in Spule 1	$u_{S2}(t)$	-	Selbstinduktionsspannung in Spule (nur wenn Belastung durch R_a).
$u_{GS1}(t)$	-	Gegeninduktionsspannung in Spule 1 aufgrund der induzierten Spannung von Spule 2.	$u_{GS2}(t)$	-	Gegeninduktionsspannung in Spule 2 aufgrund der induzierten Spannung von Spule 1.
R_{S1}	-	Wirkwiderstand Spule 1.	R_{S2}	-	Wirkwiderstand Spule 2.

Die Spannungsverhältnisse für Spule 1 bzw. Spule 2 lassen sich danach nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetzt bestimmen. Auf beiden Seiten hängt die Spannung sowohl von der Selbstinduktion als auch von der Gegeninduktion ab.

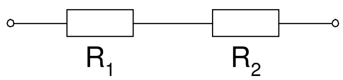
$-U_1 + i_1 \cdot R_{S1} + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M_{21} \cdot \frac{di_2}{dt} = 0$ bzw.	$-U_2 - i_2 \cdot R_{S2} - L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt} = 0$ bzw.
$U_1 = i_1 \cdot R_{S1} + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M_{21} \cdot \frac{di_2}{dt}$	$U_2 = - i_2 \cdot R_{S2} - L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt} = 0$

Nach dem Induktionsgesetz gilt für eine ideale Spule $u(t) = N \cdot \frac{d\phi}{dt}$. Die induzierte Spannung hängt von der Anzahl der Windungen ab. Wichtige Kenngröße für einen Transformator ist daher das Übersetzungsverhältnis ü. Es drückt das Verhältnis der beiden Spannungen der Primär- und Sekundärseite unter Leerlaufbedingungen (keine Belastung) aus.

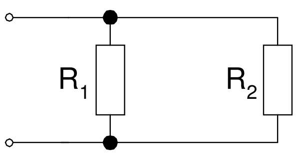
Das Übersetzungsverhältnis wird durch die Anzahl der Wicklungen bestimmt. Es gilt:		$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = ü$
Ströme werden im umgekehrten Verhältnis zum Übersetzungsverhältnis übertragen. Es gilt:		$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{ü}$
Impedanzen werden quadratisch übertragen. Es gilt:		$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = ü^2$
U_1 = Eingangsspannung (Primärseite) U_2 = Ausgangsspannung (Sekundärseite) Z_1 = eingangsseitiger Scheinwiderstand Z_2 = ausgangsseitiger Scheinwiderstand	I_1 = Stromstärke der Eingangswicklung (Primärseite) I_1 = Stromstärke der Ausgangswicklung (Sekundärseite) N_1 = Windungszahl Eingangswicklung (Primärseite) N_2 = Windungszahl Ausgangswicklung (Sekundärseite)	ü = Übersetzungs-verhältnis

12. RLC-Netzwerke

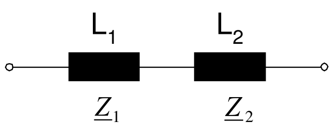
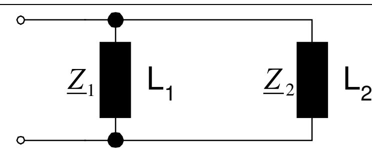
Bei der Reihenschaltung werden die Impedanzen addiert.

	Beim ohmschen Widerstand (nur Realanteil) ergibt sich: $R_G = R_1 + R_2$

Bei der Parallelschaltung werden die Leitwerte (Kehrwert der Impedanz) addiert.

	Beim ohmschen Widerstand (nur Realanteil) ergibt sich: $G_G = G_1 + G_2$ $\frac{1}{R_G} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

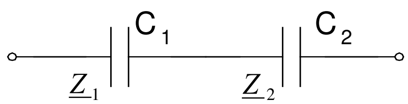
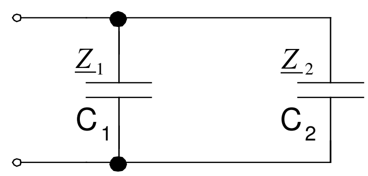
12.1. Reihen - und Parallelschaltungen von Spulen

Reihenschaltungen von Spulen	Parallelschaltung von Spulen
	
$\underline{Z}_1 = j\,\omega\,L_1$ $\quad \underline{Z}_G = j\,\omega\,L_G$ $\underline{Z}_2 = j\,\omega\,L_2$ $\underline{Z}_G = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ $j\,\omega\,L_G = j\,\omega\,L_1 + j\,\omega\,L_2$ $j\,\omega\,L_G = j\,\omega\,(L_1 + L_2)$ $L_G = L_1 + L_2$ Bei der Reihenschaltung von Spulen werden die Werte für die Induktivitäten addiert.	$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{j\omega L_1}$ $\quad \frac{1}{\underline{Z}_G} = \frac{1}{j\omega L_G}$ $\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{j\omega L_2}$ $\frac{1}{\underline{Z}_G} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$ $\frac{1}{j\omega L_G} = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2}$ $\frac{1}{L_G} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ Bei der Parallelschaltung von Spulen ergeben die Kehrwerte der Induktivitäten den Kehrwert für die Gesamtinduktivität.

Die Berechnung der Ersatzinduktivitäten erfolgt analog zur Berechnung des Ersatzwiderstandes.

12.2. Reihen - und Parallelschaltungen von Kondensatoren

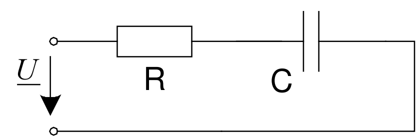
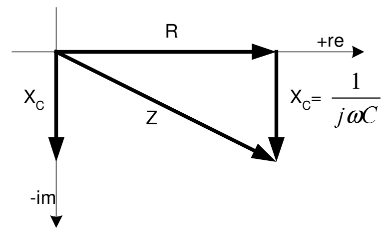
Bei der Parallelschaltung zweier Kondensatoren ergibt sich die insgesamt gespeicherte Ladung als Summe der gespeicherten Einzelladungen.

Reihenschaltung von Kondensatoren	Parallelschaltung von Kondensatoren
 	
Bei der Reihenschaltung wirken die beiden Kondensatoren, von der Spannungsquelle aus gesehen, wie ein Kondensator. Es stellen sich zwei Einzelspannungen U_1 und U_2 ein. $U_G = U_1 + U_2$ *und* $U = \frac{Q}{C}$ $\frac{1}{C_G} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ In komplexer Rechnung: $\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$ $\underline{Z}_G = \frac{1}{j\omega C_G}$ $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$ $\underline{Z}_G = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ $\frac{1}{j\omega C_G} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}$ $\frac{1}{C_G} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ *Für zwei Kondesatoren gilt daher auch:* $C_G = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$	Bei der Parallelschaltung zweier Kondensatoren ergibt sich die gespeicherte Ladung aus der Summe der Einzelladungen. $Q_G = Q_1 + Q_2$ *und* $Q = C \cdot U$ $C_G = C_1 + C_2$ In komplexer Rechnung: $\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$ $\underline{Z}_G = \frac{1}{j\omega C_G}$ $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$ $\frac{1}{\underline{Z}_G} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$ $\frac{1}{\frac{1}{j\omega C_G}} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_2}}$ $j\,\omega\, C_G = j\,\omega\, C_1 + j\,\omega\, C_2$ $C_G = C_1 + C_2$ Für die Parallelschaltung von Kondensatoren ergibt sich die Gesamtkapazität aus der Summe der Einzelkapazitäten.

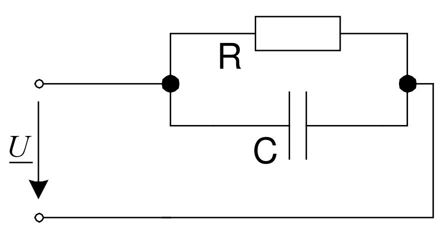
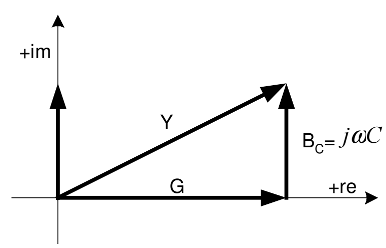
12.3. Impedanzen einfacher RLC-Netzwerke

Um die komplexe Impedanz einer Reihen- oder Parallelschaltung von Spule, Kondensator und ohmschen Widerstand darzustellen, addiert man die Vektoren der Impedanzen. Durch ein Widerstandsdreick (Reihenschaltung) oder ein Leitwertdreieck (Parallelschaltung) können die Vektoren der Einzelimpedanzen dargestellt werden. Die Berechnung der resultierenden Impedanz bedeutet dann nur noch eine Vektoraddition.

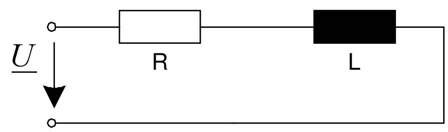
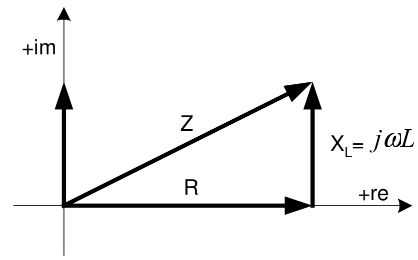
Reihenschaltung von Kondensator und Widerstand und das zugehörige Widerstandsdreieck

	
Die komplex Impedanz: $\underline{Z}_G = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C$ $= R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$	Der Betrag der Impedanz: $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ $= \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$

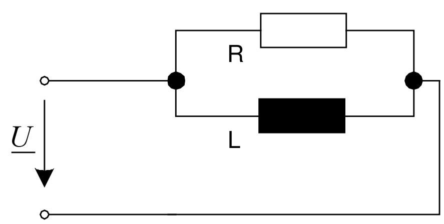
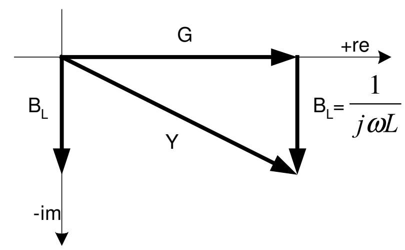
Parallelschaltung von Kondensator und Widerstand und das zugehörige Leitwertdreieck.

	
Die komplex Impedanz: $\frac{1}{\underline{Z}_G} = \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}$ $= \frac{1}{R} + j\omega C$	Der Betrag der Impedanz: $Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{G^2 + B_C^2}$ $= \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$

Reihenschaltung von Spule und Widerstand und das zugehörige Widerstandsdreieck

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Die komplex Impedanz:
$\underline{Z}_G = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L$
$= R + j\omega L$</td><td>Der Betrag der Impedanz:
$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$
$= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$</td></tr>
</table>

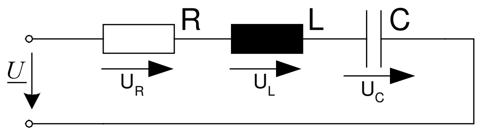
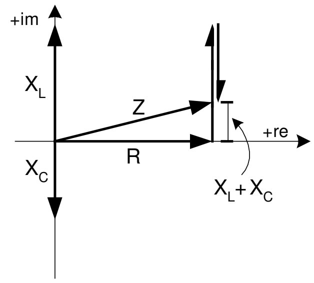
Parallelschaltung von Spule und Widerstand und das zugehörige Leitwertdreieck.

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Die komplex Impedanz:
$\frac{1}{\underline{Z}_G} = \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}$
$= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$</td><td>Der Betrag der Impedanz:
$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{G^2 + B^2}$
$= \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}}$</td></tr>
</table>

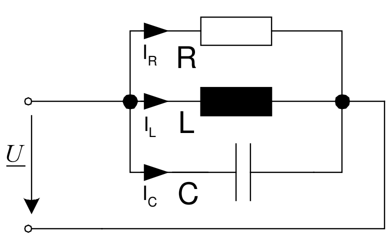
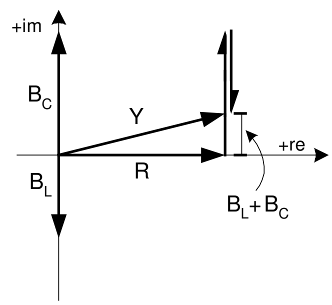
12.4. Der Schwingkreis

Sind Spule, Kondensator und ohmscher Widerstand in Reihe oder parallel geschaltet, spricht man von einem Schwingkreis. Bei der Berechnung der komplexen Impedanz kann man sich zu Nutze machen, daß die Vektoren von induktiven und kapazitiven Blindwiderstand in entgegengesetzte Richtungen weisen. Dadurch lassen sie sich einfach voneinander subtrahieren. Im Widerstands- bzw. Leitwertdreick werden die Vektoren der einzelnen Blindwiderstände direkt aneinander plaziert, mit einem Winkel von 180^0. Der resultierende Vektor steht dann noch immer im rechten Winkel zum ohmschen Widerstand.

Reihenschaltung von Spule, Kondensator und Widerstand und das zugehörige Widerstandsdreieck

	
Die komplex Impedanz: $\underline{Z}_G = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$ $= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\,(\omega L - \frac{1}{\omega C})$	Der Betrag der Impedanz: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}$ $= \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$

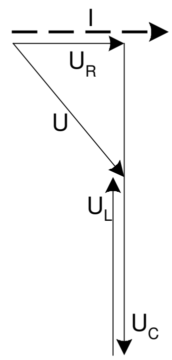
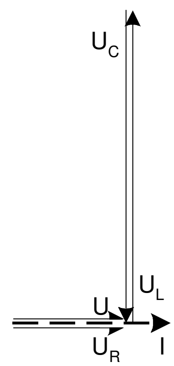
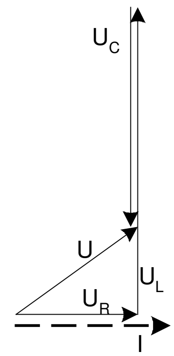
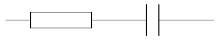
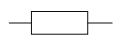
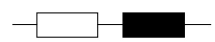
Parallelschaltung von Spule, Kondensator und Widerstand und das zugehörige Leitwertdreieck

	
Die komplex Impedanz: $\frac{1}{\underline{Z}_G} = \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C}$ $= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\,(\omega C - \frac{1}{\omega L})$	Der Betrag des Scheinleitwertes bzw. der Impedanz ergibt sich: $Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{G^2 + (B_L + B_C)^2}$ $= \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$

12.5. Eigenschaften des Schwingkreises

Bei Schwingkreisen wird zwischen drei Zuständen unterschieden. Abhängig von der Frequenz überwiegt entweder der kapazitive oder der induktive Blindwiderstand. Bei der Resonanzfrequenz f_0 nehmen der kapazitive und der induktive Blindwiderstand den gleichen Wert an. Die Spannungen über Spule und Kondensator heben sich dann gegenseitig auf. Dann ist lediglich die Spannung über dem ohmschen Widerstand von Bedeutung. Die Einzelspannungen über den Elementen des Schwingkreises können allerdings erheblich höher sein.

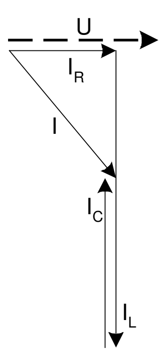
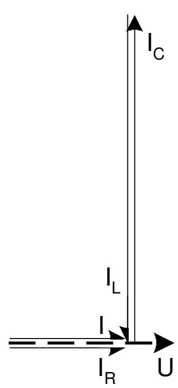
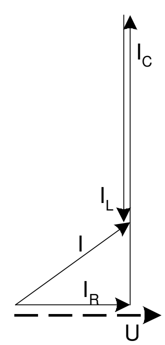
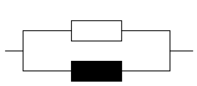
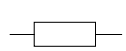
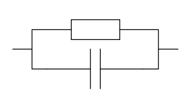
Für einen Reihenschwingkreis (Spannungsteilung) gelten folgende Zusammenhänge

unterhalb der Resonanzfrequenz	bei der Resonanzfrequenz	oberhalb der Resonanzfrequenz
		
$X_L < X_C$; wirkt wie 	$X_L = X_C$;wirkt wie 	$X_L > X_C$;wirkt wie 

Für die Resonanzfrequenz f_0 gilt: $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ bzw. $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Bei der Resonanzfrequenz fließt der maximale Strom. Ober- und unterhalb von f_0 nimmt der Strom ab.

Für einen Parallelschwingkreis (Stromteilung) gelten folgende Zusammenhänge:

unterhalb der Resonanzfrequenz	bei der Resonanzfrequenz	oberhalb der Resonanzfrequenz
		
$X_L < X_C$; wirkt wie 	$X_L = X_C$; wirkt wie 	$X_L > X_C$; wirkt wie 

Für die Resonanzfrequenz f_0 gilt: $\omega C = \dfrac{1}{\omega L}$ bzw. $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Die Formel für f_0 stimmt mit der für den Reihenschwingkreis überein. Bei der Resonanzfrequenz liegt an dem Parallelschwingkreis die maximale Spannung (minimaler Strom) an. Oberhalb und unterhalb von f_0 nimmt die Spannung ab.

(Weitere Eigenschaften des Schwingkreises werden in Kap. 16 dargestellt.)